MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

29. BAND 2./3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 15. DEZEMBER 1928)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**
erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:
K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

29. Band. **Inhalt:** 2./3. Heft.

Seite

Silverman, L. L., and J. D. Tamarkin, On the generalization of Abel's Theorem for certain definitions of summability 161
Young, R. C., Functions of Σ' defined by addition or functions of intervals in n-dimensional formulation 171
Young, R. C., On Riemann integration with respect to a continuous increment . 217
Rauter, H., Quaternionen mit Komponenten aus dem Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem beliebigen endlichen Körper 234
Sugimura, K., Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihe 264
Sugimura, K., Verallgemeinerung der Schnee-Landauschen Sätze 278
Weatherburn, C. E., On Weingarten surfaces 292
Rasch, G., Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z, \varrho)$. I. Die reellen Nullstellen von $P(z, \varrho)$ bei positivem reellem ϱ 300
Hille, E., und G. Rasch, Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z, \varrho)$. II. Geometrisches über die Nullstellen 319
Falckenberg, H., Eine geometrische Charakterisierung der Studyschen eigentlichen Kreisbogendreiecke (Dreiecke erster Klasse) 335
Rothe, R., Über wiederholte Quadraturen 346
Hopf, E., Kurze Bemerkung über wiederholte Quadraturen 373
Rothe, R., Über die Grenzfunktion wiederholter uneigentlicher Integrale 375
Jessen, B., Über konvexe Punktmengen konstanter Breite 378
Baer, R., Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik 381
van der Corput, J. G., Neue zahlentheoretische Abschätzungen. (Zweite Mitteilung) 397
Reidemeister, K., Gewebe und Gruppen 427
Zermelo, E., Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung 436
Landau, E., Über einen Egerváryschen Satz 461
Landau, E., Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung 462
Schur, I., Zur Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung 463
Schur, I., Elementarer Beweis eines Satzes von L. Stickelberger 464
Ringleb, Fr., Über konforme Abbildungen von einfach zusammenhängenden Bereichen durch algebraische Funktionen 466
Grüß, G., Die ebenen Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung 470

On the generalization of Abel's Theorem for certain definitions of summability

by

L. L. Silverman and J. D. Tamarkin.

---

1. Introduction. Abel's classical Theorem on power series was first generalized by Frobenius[1]) and Hölder[2]). The latter proved that if the series

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

is summable to the value s by Hölder's definition of summability of order k, $\boldsymbol{H}_k$, then

$$(**) \qquad \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = s\,.^{3})$$

The theorem of Frobenius, which is historically the first theorem in the theory of summable series, corresponds to the special case $k = 1$. We shall denote, as asual, $\boldsymbol{H}_1 \equiv \boldsymbol{M}$.

It is natural to replace the definition of summability $\boldsymbol{H}_k$ by the definition corresponding to the matrix

$$(1) \qquad \boldsymbol{A} = (a_{ik}); \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots; \quad a_{ik} = 0 \quad \text{if} \quad k > i,$$

and to inquire if Abel's Theorem can be generalized to this class of matrices[4]), in other words, whether the existence of the limit s of the sequence

---

[1]) Über die Leibnizsche Reihe, Crelle's J. **89** (1880), p. 262—264.

[2]) Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, Math. Annalen **20** (1882), p. 535—549.

[3]) The notation $x \to 1$ implies, throughout this paper, that x approaches 1 assuming only real positive values less than 1.

[4]) The term "matrix $\boldsymbol{A}$" shall be used here as substitute for the term "definition of summability which corresponds to the matrix $\boldsymbol{A}$".

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k; \quad s_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_k$$

implies the convergence of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

and the equality (**). We shall restrict ourselves in the first four sections to the class of matrices $\boldsymbol{A}_f$ of the type

$$a_{ik} = \sum_{h=k}^{i} (-1)^{h-k} \binom{i}{k} \binom{i-k}{h-k} \mu_h. \tag{2}$$

This class of matrices was first studied by Hurwitz and Silverman[5]) and by Hausdorff[6]). The class of the matrices (2) coincides with the class of matrices permutable with $\boldsymbol{M}$. The matrices (2) are also permutable with one another and all regular matrices of the type (2) are consistent[7]). Hurwitz and Silverman have studied the matrix (2) in the case where

$$\mu_h = f\left(\frac{1}{1+h}\right); \quad h = 0, 1, 2, \ldots,$$

$f(z)$ being analytic in a certain region of the complex plane, and have proved the following theorems:

i. *If $f(z)$ is analytic in the circle (C)*[8]), *of radius $\frac{1}{2}$ about the point $\frac{1}{2}$ and $f(1) = 1$, then the corresponding matrix $\boldsymbol{A}_f$ is regular.* (In this case the matrix $\boldsymbol{A}_f$ shall be called *analytically regular*).

ii. *If $\boldsymbol{A}_f$ and $\boldsymbol{A}_g$ are analytically regular matrices corresponding to the functions $f(z)$ and $g(z)$ respectively:*

(a) *a necessary and sufficient condition that $\boldsymbol{A}_f$ should evaluate every sequence which $\boldsymbol{A}_g$ evaluates, giving it the same value, is that all the zeros of $g(z)$ in (C) should be zeros of $f(z)$ of at least as high orders;*

(b) *a necessary and sufficient condition that $\boldsymbol{A}_f$ and $\boldsymbol{A}_g$ be equivalent is that $f(z)$ and $g(z)$ have in (C) the same zeros with the same orders.*

---

[5]) On the Consistency and Equivalence of certain definitions of summability, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), p. 1—20.

[6]) Summationsmethoden und Momentenfolgen, Math. Zeitschr. **9** (1921), p. 74—109, 280—299.

[7]) A matrix $\boldsymbol{A}$ is *regular* if it evaluates every convergent sequence to the limit of this sequence. Two matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are *consistent* if whenever a sequence is summable by both of them, it is evaluated to the same value. $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are *equivalent if* whenever a sequence is summable by either of them it is also summable by the other and to the same limit.

[8]) That is *inside and on the boundary* of the circle (C).

The main result of the present paper (**2**, **3**) is that Abel's Theorem can be extended to an arbitrary sequence summable by the analytically regular matrix $\boldsymbol{A}_f$ corresponding to the function $f(z)$, if and only if $f(z)$ has no roots in (C) except $z=0$. It follows immediately that the only analytically regular matrices which permit of the generalization of Abel's Theorem are those equivalent to Hölder's. In **4** we extend some of the preceding results to the general matrices discussed by Hausdorff. In **5** Abel's Theorem is generalized for the definition of summability of Nörlund.

2. A special case. We now consider the matrix $\boldsymbol{A}_f$ corresponding to the special function

$$f(z)=\frac{z-\varrho}{1-\varrho} \qquad (\varrho \neq 1) \tag{3}$$

and prove the following theorem:

Theorem 1. *If ϱ is a point in (C), other than 0 and 1, then the matrix $\boldsymbol{A}_f$ does not permit of a generalization of Abel's Theorem* [9]).

We define the sequence s_n as follows [10]):

$$s_n=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+q)}, \quad q=2-\frac{1}{\varrho} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

Suppose first that

$$\varrho=\frac{1}{k} \qquad (k=2,3,\ldots).$$

The matrix $\boldsymbol{A}_f$ transforms s_n into the sequence t_n consisting entirely of zeros:

$$t_n=\frac{1}{(1-\varrho)(n+1)}\sum_{h=0}^{n} h(h-1)\ldots(h-k+2)$$

$$-\frac{\varrho}{1-\varrho}n(n-1)\ldots(n-k+2)$$

$$=\frac{k}{k-1}\frac{1}{(n+1)}\frac{(n+1)n\ldots(n-k+2)}{k}-\frac{1}{k-1}n(n-1)\ldots(n-k+2)=0.$$

On the other hand, if we set

$$u_0=s_0, \quad u_n=s_n-s_{n-1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+2)x^n$$

$$=\Gamma(k)\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-1}.$$

Thus $t_n\to 0$ as $n\to\infty$ while Abel's limit does not exist.

[9]) For an arbitrary series which is summable by the matrix $\boldsymbol{A}_f$.

[10]) This sequence proved already useful for other purposes, cfr. [5]), 11. If $n+q$ is a negative integer or zero, we set $s_n=0$.

We may now assume

$$q \neq 2, 1, 0, -1, -2, \ldots .$$

Then

$$t_n = \frac{1}{(1-\varrho)(n+1)} \sum_{h=0}^{n} \frac{h!}{\Gamma(h+q)} - \frac{\varrho}{1-\varrho} \frac{n!}{\Gamma(n+q)}$$

$$= \frac{1}{1-\varrho} \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^{n} \varrho \left\{ \frac{(h+1)!}{\Gamma(h+q)} - \frac{h!}{\Gamma(h+q-1)} \right\} - \frac{\varrho}{1-\varrho} \frac{n!}{\Gamma(n+q)}$$

$$= \frac{\varrho}{\varrho - 1} \frac{1}{\Gamma(q-1)(n+1)} \to 0.$$

On the other hand,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+q-1)\ldots q} x^n = \frac{1}{\Gamma(q)} F(1, 1, q, x).$$

By a well known formula[11]) we may write

$$\Gamma^2(q-1) F(1, 1, q, x) = \Gamma(q)\Gamma(q-2) F(1, 1, 3-q, 1-x)$$
$$+ \Gamma(q)\Gamma^2(q-1)\Gamma(2-q)(1-x)^{q-2} F(q-1, q-1, q-1, 1-x),$$

so that

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{q-1}{q-2} \frac{1-x}{\Gamma(q)} F(1, 1, 3-q, 1-x)$$
$$+ \Gamma(2-q)(1-x)^{q-1} F(q-1, q-1, q-1, 1-x).$$

The first term on the right-hand side of the last equation approaches zero as $x \to 1$; and the second term on the right-hand side approaches zero when and only when

$$\operatorname{Re}(q-1) = \operatorname{Re}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) > 0.$$

Consequently the generalization of Abel's Theorem does not hold if

$$\operatorname{Re}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) \leqq 0.$$

Since the last condition is equivalent to the statement that ϱ is inside or on the boundary of the circle (C), our theorem is proved.

3. The general theorem. Now we can prove the

Theorem 2. *If $f(z)$ is a function analytic in (C), and has at least one root in (C), other than $z = 0$ $(f(1) = 1)$, then the corresponding matrix A_f does not admit of a generalization of Abel's Theorem.*

[11]) Whittaker and Watson, Modern Analysis, 3rd edition (1920), p. 291.

We may write

$$f(z) = \frac{z-\varrho}{1-\varrho}\varphi(z)$$

where ϱ is a point in (C) distinct from 0 and from 1, and $\varphi(z)$ is analytic in (C) and $\varphi(1) = 1$. We know that the matrix corresponding to $\frac{z-\varrho}{1-\varrho}$ evaluates the sequence (4) to the value zero. Since the matrix $\boldsymbol{A}_\varphi$ is regular, the matrix $\boldsymbol{A}_f$ will also evaluate this sequence to the value zero. We have seen, however, in the proof of the preceding theorem, that Abel's limit

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x\to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

fails to exist for the values of ϱ in question. Thus Theorem 2 is proved.

Corollary 1. *The only analytically regular matrices which admit of the generalization of Abel's Theorem are those whose corresponding functions have no root in* (C), *other than* $z = 0$.

Corollary 2. *The only analytically regular matrices which admit of the generalization of Abel's Theorem are those which are equivalent to Hölder's matrices.*

This follows immediately from (ii, b) and from the fact that the function $f(z)$ which corresponds to the matrix $\boldsymbol{H}_k$ is simply z^k.

4. Hausdorff's matrices. It has been proved by Hausdorff[12]) that the most general form of a regular matrix permutable with $\boldsymbol{M}$ is given by the formula (2) in which μ_h must be replaced by $\mu(h)$, the function $\mu(t)$ being defined for all values of t in the half-plane $\operatorname{Re} t \geqq 0$ by the formula

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \, d\chi(u), \tag{5}$$

where $\chi(u)$ is any function of bounded variation on the interval $(0,1)$, which is continuous at the point $u = 0$ and which satisfies the condition

$$\mu_0 = \mu(0) = \chi(1) - \chi(0) = 1; \tag{6}$$

and conversely, every matrix $\boldsymbol{A}_\mu$ which corresponds to a function $\mu(t)$ as indicated above, is a regular matrix permutable with $\boldsymbol{M}$. Such is, in particular, the matrix $\boldsymbol{A}_\mu$ which corresponds to the function

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \varphi(u) \, du, \tag{7}$$

---

[12]) See [6]).

where $\varphi(u)$ is any function integrable (in the sense of Lebesgue) on $(0,1)$. It should to be noted that the function $f(z)$ used in **1—3** is obtained from the function $\mu(t)$ by the substitution

$$f(z)=\mu\left(\frac{1}{z}-1\right), \qquad \text{or} \qquad \mu(t)=f\left(\frac{1}{t+1}\right),$$

so that the interior of the circle (C) above corresponds to the half-plane $\operatorname{Re} t>0$ and the boundary of (C) corresponds to the axis of imaginaries of the t-plane.

Lemma. *If a regular matrix* $\boldsymbol{A}_\mu$ *defined by* (2) *corresponds to a function* $\mu(t)$ *such that*

$$\mu(\alpha)=0, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{8}$$

then the matrix $\boldsymbol{A}_\nu$ *where*

$$\nu(t)=-\alpha\mu(t)\frac{t+1}{t-\alpha}=-\alpha\mu(t)-\alpha(1+\alpha)\frac{\mu(t)}{t-\alpha} \tag{9}$$

is also regular. The same is true even if $\operatorname{Re}\alpha=0$, $\alpha\neq 0$, *provided the integral*

$$\int_0^1 \frac{V_\chi(u)}{u}\,du$$

is convergent, where $V_\chi(u)$ *denotes the total variation of* $\chi(u)$ *on* $(0,u)$.

The condition $\nu(0)=1$ is obviously satisfied, and if we prove that the function

$$\nu_1(t)=\frac{\mu(t)}{t-\alpha}$$

admits of the representation

$$\nu_1(t)=\int_0^1 u^t\varphi(u)\,du,$$

$\varphi(u)$ being integrable on $(0,1)$, then formula (9) will show the regularity of the matrix $\boldsymbol{A}_\nu$. We have from (5):

$$\nu_1(t)=\frac{\mu(t)}{t-\alpha}=\int_0^1 \frac{u^{t-\alpha}}{t-\alpha}\,u^\alpha\,d\chi(u). \tag{10}$$

Suppose first that $\operatorname{Re} t>\operatorname{Re}\alpha$. Then

$$\frac{u^{t-\alpha}}{t-\alpha}=\int_0^u \xi^{t-\alpha-1}\,d\xi$$

and substitution into (10) gives

$$\nu_1(t) = \int_0^1 \{ \int_0^u \xi^{t-\alpha-1} d\xi \} d\psi(u)$$ [13])

where

$$\psi(u) = \int_0^u \xi^\alpha d\chi(\xi); \qquad \psi(1) = \int_0^1 \xi^\alpha d\chi(\xi) = \mu(\alpha) = 0. \tag{11}$$

Integrating by parts it is readily seen:

$$\nu_1(t) = \frac{\mu(t) - \mu(\alpha)}{t - \alpha} = - \int_0^1 u^t \frac{\psi(u)}{u^{\alpha+1}} du. \tag{12}$$

It remains only to prove that the function

$$\varphi(u) = - \frac{\psi(u)}{u^{\alpha+1}}$$

is integrable on $(0, 1)$. Let ε be a fixed positive number, arbitrarily small. On setting $\operatorname{Re}\alpha = \sigma$ we have

$$\int_\varepsilon^1 |\varphi(u)| du \leqq \int_\varepsilon^1 \{ \int_0^u \xi^\sigma dV_\chi(\xi) \} u^{-\sigma-1} du. \tag{13}$$

If $\sigma = 0$, the integrability of the function $\varphi(u)$ follows immediately from the conditions of our Lemma. If $\sigma > 0$, then an integration by parts transforms the right-hand nember of (13) into

$$\frac{u^{-\sigma}}{-\sigma} \int_0^u \xi^\sigma dV_\chi(\xi) \Big]_\varepsilon^1 + \frac{1}{\sigma} \int_\varepsilon^1 dV_\chi(u)$$

$$= - \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \xi^\sigma dV_\chi(\xi) + \frac{1}{\sigma} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^\sigma dV_\chi(\xi) + \frac{1}{\sigma} \int_\varepsilon^1 dV_\chi(u) < \frac{1}{\sigma} \int_0^1 dV_\chi(u) = \frac{1}{\sigma} V_\chi(1).$$

Thus the integral of the right-hand member of (13) has an upper bound independent of ε, which proves the integrability of $\varphi(u)$.

---

[13]) We use here the following proposition whose proof does not present any difficulties: If the functions $F(x)$, $\Phi(x)$ are continuous and the function $\omega(x)$ is of bounded variation on (a, b), then the function

$$\Omega(x) = \int_a^x \Phi(x) d\omega(x)$$

is also of bounded variation on (a, b) and

$$\int_a^b F(x) \Phi(x) d\omega(x) = \int_a^b F(x) d\Omega(x).$$

Cfr. T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières, Uppsala Universitets Årsskrift (1923) n° 3, p. 11—12.

Now, the function $\varphi(u)$ being integrable, the right-hand member of (12) is analytic in t on the open half-plane $\operatorname{Re} t > 0$ and continuous on the closed half-plane $\operatorname{Re} t \geqq 0$. The same is true of the left-hand member $\nu_1(t)$ of (12). Hence (12) holds true on the whole range $\operatorname{Re} t \geqq 0$, which proves our Lemma.

Theorem 3. *A regular matrix A_μ of the type* (2) *does not admit of the generalization of Abel's Theorem if the corresponding function $\mu(t)$ has at least one root $t = \alpha$ whose real part is positive or zero, provided, in the case* $\operatorname{Re}\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$, *the integral*

$$\int_0^1 V_\chi(u)\,\frac{du}{u}$$

is convergent.

The proof follows immediately from the Lemma above and from Theorem 1, if we write the function $\frac{z-\varrho}{1-\varrho}$ of Theorem 1 in the form

$$\frac{z-\varrho}{1-\varrho} = \frac{t-\alpha}{t+1}\,\frac{1}{-\alpha}; \qquad \alpha = \frac{1}{\varrho} - 1$$

and apply the same argument as in the proof of Theorem 2.

In another paper we expect to give a fuller treatement of general Hausdorff's matrices. Now it suffices to point out that there exist regular matrices of Hausdorff's type which have essential singularities on the line $\operatorname{Re} t = 0$ and which admit of the generalization of Abel's Theorem, for instance the class of Euler's matrices[14]), for which

$$\mu(t) = 0 \quad (0 < \theta < 1); \quad \chi(u) = \begin{cases} 0 \text{ if } 0 < u < \theta, \\ 1 \text{ if } \theta < u < 1. \end{cases}$$

On the other hand it is not difficult to give examples of regular Hausdorff's matrices whose corresponding functions $\mu(t)$ have the line $\operatorname{Re} t = 0$ as a singular line, and for which the argument of Lemma above is not applicable.

5. Nörlund's definition of summability[15]). Nörlund's definition of summability corresponds to the matrix of the form (1) where

$$a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n}; \quad P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n, \tag{14}$$

$p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ being any sequence of positive numbers subject only to the condition

---

[14]) K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Ztschr. **18** (1923), p. 127.

[15]) Sur une application des fonctions permutables, Lunds Univ. Årsskr. Avd. 2, 16 (1919), n° 3.

(15) $$\frac{p_n}{P_n} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

We shall denote by $\boldsymbol{N}_p$ the matrix defined by (14) and (15).

Theorem 4. *Any matrix $\boldsymbol{N}_p$ admits of the generalization of Abel's Theorem.*

We have to prove that whenever the sequence

$$t_n = \frac{1}{P_n}(p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_n s_0); \quad s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

tends to a limit s, then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

has a non-vanishing radius of convergence and defines an element of an analytic function $\omega(x)$ such that $\omega(x) \to s$ as $x \to 1$.

First we note that condition (15) implies

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_{n+1}}{P_{n+1} - p_{n+1}} \to 1 \text{ as } n \to \infty,$$

whence the radius of convergence of either of the series

(16) $$P(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n; \qquad p(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \equiv (1-x)P(x)$$

is 1. The sequence t_n being bounded, the radius of convergence of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n$$

is at least 1. Now we have

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \cdot p(x)$$

which shows that $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ has a non-vanishing radius of convergence and represents an element of the analytic function

$$\omega(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n}{P(x)}$$

which is analytic in the interior of the unit circle except, possibly, for poles, none of them being on the segment $0 \leqq x < 1$. To prove that $\omega(x) \to s$ as $x \to 1$, it remains only to show that the transformation

(17) $$\boldsymbol{B}(\sigma_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\sigma_n; \qquad b_n(x) = \frac{(1-x)P_n x^n}{p(x)} = \frac{P_n x^n}{P(x)}$$

is regular, in other words, that it evaluates every convergent sequence $\{\sigma_n\}$ to the value equal to the limit of the sequence.

The series $P(1)$ is obviously divergent, even when $p(1)$ converges. Hence $b_n(x) \to 0$ as $x \to 1$ (for fixed n) and, from (16),

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) = \frac{1-x}{p(x)} P(x) = 1 .$$

The functions $b_n(x)$ being positive, the conditions of the regularity of the transformation (17) are satisfied[16]) which proves Theorem 4.

Corollary. *All the definitions of summability of Nörlund are consistent*[17]).

For, if a series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ is summable by either of two matrices $\boldsymbol{N}_p$ and $\boldsymbol{N}_q$ to the values s_p and s_q respectively, the values s_p and s_q coincide, each of them being equal to the Abel's sum of the series:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \quad [18]).$$

Dartmouth College.

---

[16]) Cfr. O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fizyczne, 22 (1911), pp. 113–119; Silverman, On the definition of the sum of a divergent series, University of Missouri Studies, Vol. 1, n° 1 (1913), 46. In our case the conditions are:

$$\text{(i)} \lim_{x \to 1} b_n(x) = 0; \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n(x)| < A; \qquad \text{(iii)} \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) = 1,$$

the variable x approaching 1 instead of infinity.

[17]) This result was obtained by Nörlund [15]) in a different way.

[18]) The same argument may be applied to the more general case where p_n are of both signs or zeros, provided

$$\text{(i)} \quad P_n > 0; \qquad \text{(ii)} \quad \frac{p_n}{P_n} \to 0 \qquad \text{(iii)} \quad \text{The series } P(1) \text{ diverges.}$$

The corresponding matrices contain all Cesaro's matrices $\boldsymbol{C}_r$ $(r > -1)$ as special cases.

(Eingegangen am 19. März 1927.)

Functions of Σ defined by addition or functions of intervals in n-dimensional formulation.

Von

Rosalind Cecily Young in Girton College, Cambridge (England).

Introduction.

We are concerned with points and sets of a fundamental bounded closed region of n-space, which we may assume referred to a Cartesian coordinate system $0\,u_1, u_2, \ldots, u_n$. In this system, a *plane* is the set of points P whose coordinates u_i satisfy a linear relation with constant coefficients

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = c$$

(called the "equation" of the plane) and a *strip* of *width* w is the set of points P whose coordinates u_i satisfy a linear double inequality

$$c \leqq a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n \leqq c + w$$

(called by analogy the "equation" of the strip). A plane is determined by n of its points $P_1, P_2, \ldots$, provided the determinant

$$[P P_1 P_2 \ldots P_n] = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ 1 & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots & u_n^{(1)} \\ 1 & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

(where the $(1+k)^{\text{th}}$ row contains the coordinates of the k^{th} point, and 1), is different from zero for some point $P = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. A *straight segment* has for "equations"

$$\frac{u_1 - u_1^{(1)}}{u_1 - u_1^{(2)}} = \frac{u_2 - u_2^{(1)}}{u_2 - u_2^{(2)}} = \ldots \quad \frac{u_n - u_n^{(1)}}{u_n - u_n^{(2)}} \leqq 0.$$

The *distance* of two points is the square root of the sum of the squares of the differences of their corresponding coordinates, and a *sphere* is the set of points whose distance to a fixed point, its *centre*, is $\leqq$ a given number, its *radius*. The double radius is the *diameter* of the sphere. The simple closed set of points, whose representatives in one, two and three dimensions are respectively the closed segment, triangle and tetrahedron, and may be called a *wedge*, is defined in terms of its $(n+1)$ *corners*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$$

by the rule

$$[P_1 P_2 \ldots P_{i-1} P P_{i+1} \ldots P_{n+1}] = \begin{vmatrix} 1 & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots & u_n^{(1)} \\ 1 & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & u_n^{(i-1)} \\ 1 & u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ 1 & u_1^{(i+1)} & u_2^{(i+1)} & \ldots & u_n^{(i+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

has an invariable sign[1]) for all i, and all P belonging to the wedge. Here the k^{th} row, for $k \neq i$, is constituted by the coordinates of P_k, and 1, but the i^{th} row by the coordinates of P and 1. Points P of the wedge for which one (at least) of the $(n+1)$ quantities is zero constitute the *frontier* of the wedge. The portion of the frontier in the plane determined by n of its corners is a *face* of the wedge and the straight segment joining two of its corners is an *edge*. Two wedges are *contiguous* if they have only frontier points in common, which then form a plane set.

Simple closed sets are sums[2]) of a finite number of wedges, which may always be arranged to be *non-overlapping or contiguous*. From them all sets of points analytically definable (Borel sets), — which we will denote by $\dot{E}$ —, may be generated by monotone sequences; i. e., recalling the definitions

---

[1]) i. e. is either $\geqq 0$, or $\leqq 0$.

[2]) We adopt the convention that in addition and subtraction of sets of points, all points occurring with multiplicity $\geqq 1$ are counted once only, and with multiplicity $\leqq 0$, are omitted. — The *product* $\dot{E}_1 \dot{E}_2, \ldots$ of a number of sets will as usual be the set of points which occur in all. — And sets $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \ldots$ be said to be *non-overlapping* if $\dot{E}_i \dot{E}_j$, for all i, j, is zero.

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}(\dot{E}_i) = \lim_{i\to\infty}(\dot{E}_i + \dot{E}_{i+1} + \dots)$$
$$= (\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 + \dots)(\dot{E}_2 + \dot{E}_3 + \dots)(\dot{E}_3 + \dots)\dots$$

$$\underline{\lim_{i\to\infty}}(\dot{E}_i) = \lim_{i\to\infty}(\dot{E}_i \dot{E}_{i+1}\dots) = \dot{E}_1\dot{E}_2\dot{E}_3\dots + \dot{E}_2\dot{E}_3\dots + \dot{E}_3\dots + \dots$$

and implying by the term "limit" that $\overline{\text{limit}}$ and $\underline{\text{limit}}$ coincide, — all sets $\dot{E}$ are expressible as the repeated limit of $\dot{E}_{i_1 i_2\dots}$ when each of the indices $i_1, i_2, \dots$ (finite or transfinite in ordinal number) in turn tends to ∞, and the original sets $\dot{E}_{i_1 i_2\dots}$ are all simple closed sets; and we can arrange that for each of the indices i_λ $(\lambda = 1, 2, \dots, \alpha, \dots)$ the sequences whose limits are taken are monotone sequences, each term of the sequence containing the next (monotone descending) or each term contained in the next (monotone ascending); by the diagonal method, we can arrange that the sequences for two succesive i_λ and $i_{\lambda+1}$ be always monotone in opposite senses; and in that case, the ordinal number of the last index gives the *class* of $\dot{E}$. Sets of class 1 divide into o-sets and i-sets, sets of class 2 into oi-sets and io-sets, corresponding to monotone ascending and monotone descending first sequences (i_1).

The *measure* of a set, $m(\dot{E})$, is defined by induction from its value for simple sets, with the rules

1) $m(\dot{E}_1 + \dot{E}_2) = m(\dot{E}_1) + m(\dot{E}_2)$ if $\dot{E}_1\dot{E}_2 = 0$,

2) $m\left(\lim_{i\to\infty}\dot{E}_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(\dot{E}_i)$,

3) the measure of a plane set is zero.

The frontier of a wedge has measure zero, in accordance with 3); therefore, however a simple closed set be expressed as the sum of a finite numbers of wedges, non-overlapping or contiguous, the sum of the measures of these wedges is the same, and equal to the measure of the complete simple set, in accordance with 1). The definition of measure thus reduces to a consistent definition of the measure of a wedge, which is obtained by equating the measure of a wedge to its *volume* given in Cartesian coordinates by the absolute value of

$$\frac{1}{n!}[P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1}] = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ 1 & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \dots & u_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \\ 1 & u_1^{(n+1)} & u_2^{(n+1)} & \dots & u_n^{(n+1)} \end{vmatrix}.$$

A simple closed set has for frontier the sum of a finite number of plane sets. Two simple closed sets are said to be *contiguous* if they have

in common only frontier points. A simple closed set can always be exhibited as the sum of any (finite) number of simple closed sets, non-overlapping or contiguous; such a set of simple closed sets is usually called a *subdivision* of the original one. This nomenclature can be justified[3]) by considering ideal elements, associated in (1, 1) correspondance with the simple closed sets, which are *distinct* when their associated simple sets are not identical, and possess a *sum* when their associated simple sets are non-overlapping or contiguous; that "sum" being then the associate of the sum of these simple sets, and having for *subdivision* the set of the associates of these simple sets. It is however still more convenient to consider the "sum", when existent, of a number of these ideal elements as not identical with the element corresponding to the sum of their associated simple sets, but as forming an element of higher order, entirely defined by its constituent elements, and in which these are not merged, but remain distinct. With this convention, every simple set has associated with it a single primary element or *unit* and any number of secondary elements, "sums" of units whose associated simple sets, non-overlapping or contiguous, have for sum the given simple set; these secondary elements are *subdivisions* of the former unit. A secondary element is then precisely the set of the units from which it is built up. But it is not an arbitrary finite set of units, since these, to build up a secondary element, must be capable of addition in the previous sense, i. e. correspond to non-overlapping or contiguous simple sets. In calling a secondary element the *sum* of its units, we mean to bring a constant reminder of this fact; but we should be involved in logical difficulties if we did not remark at the outset that it involves a tacit substitution, for each of the units in a sum, of the *set* containing that unit as its only element. There is *no logical* identity between a set and its element, even when unique. But in most mathematical considerations the one may be *equated* to the other. Thus it is that in the successive development of integers from unity, rational numbers from integers, real numbers from rational numbers, complex numbers from real numbers, the mathematician, though with drawing at each stage the scaffolding which served for his new construction, can speak as if he retained it and identified its coarser grain with the finer material which now fills its place.

Consistently with the duplicate point of view above described, *sums* of secondary elements are then defined under the same condition as sums of units (namely when the associated simple closed sets are non-overlapping

[3]) A set of parts which overlap cannot strictly be regarded as a subdivision of the whole.

or contiguous) and are again secondary elements (namely those consisting of all the units of the given elements). A *part* of an element consists of some of its units. Subdivisions of each of the units of an element possess a sum, which we way call a *subdivision* of the complete element itself. A subdivision of any element is thus always a secondary element with the same associated simple set.

An element and its associated simple closed set will be denoted by the same letter, with a superscript point to distinguish the latter, and emphasise the fact that it consists of points, while the former is deprived of every property of a set of points, only bearing in fact the quality of an *extension* in space, characterised by position, magnitude, and various complexes of direction (orientation) into which it is not necessary to enter for the purpose of the present simple theory. We shall speak of the *span* of an element, identifying this with the *span* of its associated simple set, or diameter of the smallest sphere containing this set; and of its *norm*, or largest of the spans of the units from which it is built up. Other magnitudes may be defined as required.

We shall be occupied with units and elements as arguments of a numerical function in a range which may comprise either the whole universe of such elements, or any part of it which fulfills all the essential conditions. These we set down here, and reserve the name of a *perfect field* to any set of elements satisfying them.

Definition. A *perfect field* of (secondary) elements is a set characterised by the following properties:

1) Every part of an element of the field also belongs to the field; in particular all the units which constitute it.

2) The sum of any two elements of the field, when defined, is also an element of the field; i. e. when the two corresponding simple closed sets are non-overlapping or contiguous.

3) The sum and product[4]) of sets with representatives in the field also have representatives in the field.

4) If, of two simple closed sets with representatives in the field, the one is contained in the other, then every representative of the contained is part of some representative of the containing set; and the second element can always be chosen to have same norm as the first.

5) Every simple closed set is the limit of a monotone descending sequence of simple closed sets with representatives in the field. And with

[4]) When this is a simple closed set; i. e. if the given sets have interior points in common.

the omission of its frontier, it (i. e. its interior) is the limit of a monotone ascending sequence of such sets.

From these 5 proporties we deduce:

6) Every element of the field has subdivisions of arbitrarily small norm belonging to the field.

7) If, of two simple closed sets with representatives in the field, the one is contained in the other, then every pair of their representatives have subdivisions, of arbitrarily small norm, of which the one is part of the other.

These are the seven fundamental properties of a perfect field. That 6) follows from the first five is easily seen. For by property 5) every simple closed set, and in particular one with a representative *unit* in the field, contains a simple set with a representative of arbitrarily small span, and a fortiori of arbitrarily small norm in the field. By 4) this is part of a subdivision of the representative unit, of arbitrarily small norm. Hence 6), true for individual units of the field, is by 2), true for all elements of the field. To prove 7) we first consider a unit of the element, representative of the contained set. The common part of the associated simple sets of that unit and any unit of the other element has a representative in the field, by 3); and this is part of a subdivision of the latter unit, by 2); by addition we obtain a subdivision of the former unit (of the first element) which is part of a subdivision of the complete second element. — Now repeat this reasoning (as we may), taking instead of the first element that part of it obtained by omitting the unit abready considered; and instead of the second element, that part of its subdivision just constructed, which is obtained by omitting the subdivision of the unit already considered. We obtain a subdivision of that part, a part of which is a subdivision of another unit of the first element. By adding the subdivision of the first unit, we therefore have a subdivision of the whole second element, a part of which is a subdivision of two of the units of the first element. — Proceeding in this manner we have, after a finite number of steps, the subdivision required by 7).

By 1) and 2), *a perfect field is entirely characterised by the set of its unit elements; all possible elements built up from them, and no others, constitute the field.* By 3), 4) and 5) the choice of this set of unit elements is restricted. It may be for instance the set of representatives of all wedges, or of all rectangular intervals, defined by

$$u_i^{(1)} \leqq u_i \leqq u_i^{(2)}, \qquad u_i^{(1)} < u_i^{(2)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in a Cartesian system of coordinates.

Functions of elements whose units are rectangular intervals were examined, as "functions of intervals" by J. C. Burkill in 1923[5]), chiefly with a view to applications in the theory of Areas and Volumes. The classical treatment of the latter requires, however, a further restriction on the range of the argument of the functions considered, to what I may call *imperfect fields*. These I propose to consider in a later paper. By systematically utilising the wider range, results are obtained by extremely simple means, and properties which otherwise appear as essentially one-dimensional, obtain their proper generalisations to n-space. Theorems 7. 1, 7. 2, of Burkill's paper, which utilise the wider range in part, are immediate corollaries of our Theorems I and XIII; Theorem 5. 1. in that paper is a conclusion *a fortiori* from our XIX and XX; Theorem 7. 4. also follows from our Theorem XIII, which is the n-dimensional analogue of Theorem 7. 6. p. 309 of the said paper, and its Corollary, for the wider range. In all cases the extreme precision of the results in our present theory, and the simplicity of its methods, is due to that of the underlying ideas.

We proceed to develop the theory and begin by summarising the definitions which will be in use. We shall assume throughout that only the units of a given *perfect field* are used. This is the range, to which the symbol Δ, reserved for them, is given, and may moreover, compatibly with the conditions 1) and 5), be chosen at will. Applications, notably of the theorems in section VIII, will occur to every one. They will moreover be explicitely stated in connection with the sequel to which I have referred above.

I. The spacial elements of the theory.

A. The units Δ and their associated simple sets $\dot{\Delta}$.

1) $\Delta =$ a unit in a given perfect field[6]),

2) $\dot{\Delta} =$ its associated simple closed set,

3) $v_\Delta =$ the volume of Δ, or the measure of $\dot{\Delta}$, $m(\dot{\Delta})$.

4) span $\Delta =$ span $\dot{\Delta}$, or diameter of the smallest sphere containing $\dot{\Delta}$.

Note. We consider Δ and $\dot{\Delta}$ as belonging to one another; and speak of the Δ of $\dot{\Delta}$, or the $\dot{\Delta}$ of Δ, indiscriminantly. Similarly with the following entities, although there the correspondence is many-one.

[5]) L. M. S. Proc. 2, 22 (part. 4), p. 275 seq.

[6]) To fix the ideas, the reader may think of $\dot{\Delta}$ as being an arbitrary wedge, and Δ as the set of its $(n+1)$ corner points. But in proofs the fundamental properties should be refered to, to verify the results.

B. The secondary elements Σ and their associated simple sets $\dot{\Sigma}$.

1) Σ (or σ) = a system of a finite number of Δ, whose $\dot{\Delta}$ are non-overlapping or contiguous.

2) $\dot{\Sigma}$ (or $\dot{\sigma}$) = the sum of the $\dot{\Delta}$ whose Δ constitute Σ (or σ).

3) Equality. Two Σ are equal (=) if they consist of the same Δ. A Σ is *part* of another if it consists of some of its Δ; in particular, it may consist of all.

4) Addition and Subtraction. A Σ is *sum* of two or more others (symbol +) if it consists of all the Δ of these; implying that these have for associates *non-overlapping or contiguous* simple sets.

$\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2$ means $\Sigma + \Sigma_2 = \Sigma_1$; implying that Σ_2 is part of Σ_1.

5) v_Σ = *volume of* Σ, is the sum of the volumes of its Δ.

6) ν_Σ = *norm of* Σ, is the greatest of the spans of its Δ.

7) w_Σ = *width of* Σ, is the width of the narrowest strip containing $\dot{\Sigma}$.

8) span Σ = span $\dot{\Sigma}$ = diameter of smallest sphere containing $\dot{\Sigma}$.

9) When a simple closed set which has representative Σ is considered, irrespective of its various associated Σ, we shall sometimes denote it by $\dot{A}$. We shall sometimes say Σ is in $\dot{A}$ or $\dot{\Delta}$, meaning $\dot{\Sigma}$ is contained in $\dot{A}$ or $\dot{\Delta}$.

C. Subdivisions of Δ and of Σ.

1) A *subdivision of* Δ_0 is a Σ whose $\dot{\Sigma} = \dot{\Delta}_0$. It is a *proper* subdivision if $\Sigma \neq \Delta_0$.

2) A *subdivision of* Σ_0 is a Σ sum of subdivisions of the Δ of Σ_0. It is a *proper* subdivision if $\Sigma \neq \Sigma_0$.

3) A subdivision of Σ_0 is *consecutive* to another if it is a proper subdivision of the latter. This is also said to be an *antecedent* of the former. The number of possible antecedents of a given subdivision is always finite.

4) Σ is *obtained by superposition of* Σ_1 *on* Σ_0, when $\dot{\Sigma}_1$ contains $\dot{\Sigma}_0$, if it is a subdivision of Σ_0 and part of a subdivision of Σ_1, but has no antecedent with this same property. If $\dot{\Sigma}_1 = \dot{\Sigma}_0$, then Σ is also obtainable by superposition of Σ_0 on Σ_1, since any antecedent subdivision of Σ, which was part of a subdivision of Σ_0, would be an antecedent subdivision of Σ_0.

Σ_0 is *unchanged by superposition of* Σ_1 if it is part of a subdivision of Σ_1; other wise it is always *changed by superposition* of Σ_1.

Note. Property 7) of a perfect field expresses the existence of subdivisions of Σ_0 which are part of subdivisions of Σ_1, when $\dot{\Sigma}_1$ contains $\dot{\Sigma}_0$; the antecedent sub-

divisions of Σ_0 are finite in number and there is certainly at least one which as no further antecedents equal to part of a subdivision of Σ_1, unless Σ is already that one

5) A *sequence of subdivisions* of Σ_0 is a succession of subdivisions of Σ_0 whose norms form a succession converging to zero.

A sequence of subdivisions is *obtained by superposition of* Σ_1 on another sequence if each of its terms is obtained by superposition of Σ_1 on the corresponding term of this other sequence.

A sequence of subdivisions is *unchanged by superposition of* Σ_1 if it consists of subdivisions unchanged by superposition of Σ_1.

D. The generated sets of points $\dot{E}$.

1) $\dot{E}$ (*or* $\dot{e}$) is any set of points analytically definable (Borel set) and may be obtained, by successive passages to the limit, from the sets $\dot{\Sigma}$. Its measure results by the same limiting process from $m(\dot{\Sigma}) = v_\Sigma$.

2) $\dot{E}$ *is within* ε *of* $\dot{E}_0$ if $m(\dot{E} - \dot{E}_0) < \varepsilon$, $m(\dot{E}_0 - \dot{E}) < \varepsilon$. We can here state the proposition:

Given any $\dot{E}$, *there is a* $\dot{\Sigma}$ *within* ε *of* $\dot{E}$. More precisely,

3) *Given any finite number of non-overlapping* $\dot{E}_i$, *there is a* Σ, *sum of parts* Σ_i, *whose* $\dot{\Sigma}_i$ *are non-overlapping and each within* ε *of the corresponding* $\dot{E}_i$.

4) *Almost everywhere*, or $p.p$ *in* $\dot{A}$, means for all points or subsets of an $\dot{E}_0$ contained in $\dot{A}$, with $m(\dot{E}_0) = m(\dot{A})$.

E. The process of convergence. Index of the convergence to a point.

1) $\dot{E}' \to P_0$, $\dot{E}'$ *tends to, converges to* P_0, means $\dot{E}'$ describes a succession

$$\dot{E}_1, \dot{E}_2, \ldots, \dot{E}_k, \ldots$$

some of, and indeed all but a finite number of, whose terms are contained in a sphere of centre P_0 and radius ε as small as we please. (I. e. the succession *accumulates about* P_0.)

2) $\Sigma' \to P_0$, is equivalent to $\dot{\Sigma}' \to P_0$.

3) $\Sigma' \to P_0$, *index* ϱ, where ϱ is a finite number > 1, means $\Sigma' \to P_0$, and $\dot{\Sigma}'$ is contained in a sphere of centre P_0, and volume $\varrho v_{\Sigma'}$. ϱ is an *index of the convergence of* Σ' *to* P_0.

4) Σ' *belongs to* P_0, *index* ϱ, means $\dot{\Sigma}'$ is contained in a sphere of centre P_0, and volume $\varrho v_{\Sigma'}$, but does not necessarily $\to P_0$.

Notes. a) If $\Sigma' \to P_0$, index ϱ, its span and *a fortiori* its norm, tend to zero.

b) If $\Sigma' \to P_0$, index ϱ, it also $\to P_0$, index $\varrho_1 > \varrho$.

c) If $\Sigma' \to P_0$, index ϱ, then it belongs to P, for any index $\bar{\varrho} > \varrho$, for all P of a certain (sufficiently small) sphere of centre P_0.

d) If Σ' belongs to P, index ϱ, then $\frac{\text{span}\,(\dot{\Sigma}'+P_0)}{\text{width}\,\Sigma'} \leqq \frac{\varrho}{k(n)}$ where $k(n)$ is a constant depending on the number n of dimensions of our space. For the volume is such a constant multiple of the n^{th} power of its diameter; and by definition of width and span, $v_\Sigma \leqq w_\Sigma (\text{span}\,\Sigma)^{n-1}$.

e) A kind of converse is true in certain cases, namely the proposition: of $\frac{\text{span}\,(\dot{\Sigma}'+P_0)}{\text{width}\,\Sigma'} \leqq \varrho$, then Σ' belongs to P_0, index $\bar{\varrho}$, where $\bar{\varrho}$ is finite when ϱ is finite (proportional to ϱ^n). This holds when $\dot{\Sigma}'$ is a "convex polygonal body" and therefore contains a sphere of volume $\geqq$ some constant multiple $\bar{k}(n)$ of $(w_\Sigma)^n$.

f) The lower bound, or smallest, of all ϱ such that $\dot{\Sigma}_0$ is contained in a sphere of centre P_0 and volume $\varrho\, v_{\Sigma_0}$, is the inverse of the "parameter of regularity" of $\dot{\Sigma}_0$ "with respect to P_0" (Lebesgue).

g) We have therefore the following property, which in its usual form is sometimes referred to Vitali, though only stated and proved, by him[7]) in the simple case when all given $\dot{\Sigma}$ are single segments (= wedges or closed intervals) in one dimension and contain the point P to which they belong; he also left it to be inferred[8]) that the theorem held in more dimensions, assuming the case, to which his applications are adapted[9]), when the given $\dot{\Sigma}$ are single cubic intervals and *contain* the point P_0 to which they relate; in these cases the index of convergence is always bounded and no stipulation to that effect has to be made. A modified statement and proof is given in Caratheodory, Reelle Functionen pp. 299—307, which is now classical, to suit the more general case. This proof is a little lengthened by what may appear at first sight an elegant artifice for avoiding Vitali's repeated implication of the axiom of choice, but has actually for effect, and no doubt for main object, to throw this implication back among the previous propositions on which the proof rests. By reintroducing Vitali's own procedure, conciseness and independance is gained, however. The proof which is here appended, for convenience and also to better emphasise the meaning and import of the proposition itself, appears to me more direct, also, than the classical proof, even for Vitali's simple case. There is only a slight simplification, in the proof, in assuming the given $\dot{E}$ to be simple sets $\dot{\Sigma}$, but as we shall only require it in this case, and the statement then becomes peculiarly straightforward and precise, we will not enunciate it in more general form.

5) Fundamental approximation lemma for convergence with finite index.

If, for each point P of a set $\dot{E}$ contained in $\dot{A}$, is given a succession of Σ' converging to P, index ϱ_P, then there is a Σ_0 of arbitrarily small norm, sum of a finite number of all the given Σ, whose $\dot{\Sigma}_0$, interior to $\dot{A}$, is within ε of $\dot{E}$.

We give the proof omitting the clause that Σ_0 shall have arbitrarily small norm. To satisfy this clause, we simply disregard all of the given

---

[7]) G. Vitali, Sui gruppi di punti ecc., Torino Atti **43** pp. 229—246.
[8]) Ibid. pp. 230, 232, 235.
[9]) Ibid. p. 246.

Σ' whose norms are greater than is required. The conditions of the lemma still hold, and therefore if true without the clause in question, the lemma is true with it.

If $\dot{E}_n$ be the subset of $\dot{E}$ in which $\varrho_P \leqq n$, $\lim_{n\to\infty} \dot{E}_n = \dot{E}$, since ϱ_P is finite in $\dot{E}$. So $\lim_{n\to\infty} m(\dot{E}_n) = m(\dot{E})$. There is therefore a subset $\dot{E}'$, within $\frac{\varepsilon}{4}$ of $\dot{E}$, in which ϱ_P is bounded, $\leqq K$ say. Let $\dot{\Sigma}$ be chosen, contained in $\dot{A}$, and within $\frac{\varepsilon}{4}$ of $\dot{E}'$. It is then within $\frac{\varepsilon}{2}$ of $\dot{E}$. Let q be the number of A which constitute $\bar{\Sigma}$, and let $\bar{A}$ be any one of them.

Let α_1 be the upper bound of the volumes of the given Σ' whose Σ' are interior to $\bar{A}$ and let Σ_1 be one of these Σ', of volume greater than $\alpha_1 - \varepsilon_1$.

Let α_2 be the upper bound of the volumes of those of the given Σ' whose $\dot{\Sigma}'$ are interior to $\bar{A}$ and do not overlap with $\dot{\Sigma}_1$, and let Σ_2 be one of these Σ', of volume greater than $\alpha_2 - \varepsilon_2$.

And so on.

Having designated $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, we define α_{k+1} as the upper bound of the volumes of those of the given Σ' whose $\dot{\Sigma}'$ are interior to $\bar{A}$ and do not overlap with $\dot{\Sigma}_1 + \dot{\Sigma}_2 + \cdots + \dot{\Sigma}_n$, and we define Σ_{k+1} as one of these Σ', of volume greater than $\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1}$. As regards the arbitrary numbers ε_k, nothing will be required except that their sum is convergent.

Given any Σ' of our set, with $\dot{\Sigma}'$ interior to $\bar{A}$, this $\dot{\Sigma}'$ overlaps with one of the $\dot{\Sigma}_k$. If the first with which it overlaps is the k^{th}, then $v_{\Sigma'} \leqq \alpha_{k-1}$.

Each P of $\dot{E}$ interior to $\bar{A}$ has associated with it (converging to it) such $\dot{\Sigma}'$, each enclosed by a sphere of centre P and volume $K v_{\Sigma'}$. If the first $\dot{\Sigma}_k$ which overlaps with a given $\dot{\Sigma}'$ associated with P be the k^{th}, P is therefore in a sphere of volume $K\alpha_{k-1}$ overlapping with $\dot{\Sigma}_k$. Also $\dot{\Sigma}_k$ is in a sphere of centre P_k and volume $K\alpha_k \leqq K\alpha_{k-1}$. This shows that P is in a sphere of centre P_k and volume $K'\alpha_{k-1}$, where $K' = 3^n K$, n being the number of dimensions of our space. If P is exterior to $\dot{\Sigma}_i$, it can only have a finite number of its $\dot{\Sigma}'$ overlapping with $\dot{\Sigma}_i$, for there are only a finite number of them with span greater than the distance of P to the closed set $\dot{\Sigma}_i$. This shows that

If P, interior to $\bar{A}$ and belonging to $\dot{E}$, is exterior to $\dot{\Sigma}_i$ for all $i \leqq k_0$, then there is a $k > k_0$ such that the sphere of centre P_k and

volume $K'\alpha_{k-1}$ *contains* P. *A fortiori,* we have

$$m\{\dot{E}\dot{\Delta} - \dot{\Sigma}_1 - \dot{\Sigma}_2 - \ldots - \dot{\Sigma}_N\} \leqq K'(\alpha_{N+1} + \alpha_{N+2} + \ldots),$$

for the frontier of $\dot{\Delta}$ has of course zero measure.

On the other hand, the series of α_k is convergent, provided that of the ε_k is; for $\alpha_1 - \varepsilon_1$, $\alpha_2 - \varepsilon_2$, ..., $\alpha_k - \varepsilon_k$, ... are respectively less than the measure of the non-overlapping $\dot{\Sigma}_1, \dot{\Sigma}_2, \ldots, \dot{\Sigma}_k, \ldots$, all interior to $\dot{\Delta}$.

Hence *for all sufficiently large* N'

$$m\{\dot{E}\dot{\Delta} - \dot{\Sigma}_1 - \dot{\Sigma}_2 - \ldots - \dot{\Sigma}_n\} \leqq \frac{\varepsilon}{2q}.$$

This for each of the Δ of $\bar{\Sigma}$, which are q in number. The $\dot{\Sigma}_i$ are in each case non-overlapping and interior to $\dot{\Delta}$.

Thus we have a Σ_0, sum of all these Σ_i for $i = 1$ to N' for each Δ, and

$$m\{\dot{E}\dot{\bar{\Sigma}} - \dot{\Sigma}_0\} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

As $\dot{\Sigma}'$ is within $\frac{\varepsilon}{2}$ of $\dot{E}$, this implies

$$m\{\dot{E} - \dot{\Sigma}_0\} < \varepsilon.$$

Also, because $\dot{\Sigma}_0$ is contained in $\dot{\bar{\Sigma}}$,

$$m\{\dot{\Sigma}_0 - \dot{E}\} < \varepsilon.$$

$\dot{\Sigma}_0$ is thus within ε of $\dot{E}$. Σ_0 is constructed entirely from the given Σ. $\dot{\Sigma}_0$ is interior to $\dot{\bar{\Sigma}}$, therefore to $\dot{A}$. It satisfies all the requirements and the lemma is proved.

We may remark that the various given Σ' *whose sum is* Σ_0 *were not merely capable of addition, but have non-overlapping* $\dot{\Sigma}'$.

II. The functional elements of the theory.

A. The functions of Σ defined by addition.

1) $f(\Delta)$ denotes any numerical function of argument Δ, defined for the whole range of units in the given perfect field.

$f(\Sigma)$ is the sum of $f(\Delta)$ for all the Δ which constitute Σ.

We have therefore, as characteristic property of $f(\Sigma)$, its *additiveness with respect to* Σ i. e.:

$$\text{if } \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad f(\Sigma) = f(\Sigma_1) + f(\Sigma_2).$$

2) f *absolute or* $|f|(\Sigma)$ is defined by

$$|f|(\Delta) = |f(\Delta)|.$$

It is thus the sum of $|f(\Delta)|$ over the Δ of Σ.

3) *The positive and negative parts of* $f(\Sigma)$ are functions $\varphi(\Sigma)$ and $-\psi(\Sigma)$ defined by

$$\varphi(\Delta) = f(\Delta) \quad \text{where } \geqq 0, \quad \text{and otherwise zero,}$$
$$-\psi(\Delta) = f(\Delta) \quad \text{where } \leqq 0, \quad \text{and otherwise zero.}$$

$\varphi(\Sigma)$ and $\psi(\Sigma)$ are *non-negative* functions.

Note. We have therefore $\varphi(\Sigma) = f(\Sigma_1)$, $\psi(\Sigma) = -f(\Sigma_2)$, where $\Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma$. Thus $f(\Sigma) = \varphi(\Sigma) - \psi(\Sigma)$. Also $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$ have one the value $|f(\Delta)|$, the other the value 0; thus $|f|(\Sigma) = \varphi(\Sigma) + \psi(\Sigma)$. Also by construction, we have

$$-\psi(\Sigma) \leqq f(\Sigma) \leqq \varphi(\Sigma) \leqq |f|(\Sigma).$$

4) $f(\Sigma)$ is said to *decrease by subdivision* if $f(\Sigma') \leqq f(\Sigma)$ whenever Σ' is a subdivision of Σ.

$f(\Sigma)$ is said to *increase by subdivision* if $f(\Sigma') \geqq f(\Sigma)$ whenever Σ is a subdivision of Σ.

$f(\Sigma)$ is said to be *unchanged by subdivision* if $f(\Sigma') = f(\Sigma)$ whenever Σ' is a subdivision of Σ.

Note. To know whether one of the inequalities holds always, it suffices to ascertain whether it holds when Σ is an isolated Δ, and Σ' any subdivision of it[10]). *When* $f(\Sigma)$ *is unchanged by subdivision, it has the same value for all* Σ *whose* $\dot{\Sigma}$ *coincide.* This is seen by superposing an arbitrary one of these Σ on any given one.

B. The $\overline{S}$ and $\underline{S}$ of f over Σ.

These are the additive functions of Σ defined by

1) $\overline{S}_\Delta(f)$ equals the greatest limit of $f(\Sigma)$ } for sequence of subdivisions
2) $\underline{S}_\Delta(f)$ equals the least limit of $f(\Sigma)$ } of Δ.

Note. Their values for Σ_0 (obtained by addition from the values for the constituent Δ of Σ_0) are seen to be equal respectively to the greatest and least of the limits of $f(\Sigma)$ for sequences of subdivisions if Σ_0.

We have the usual Elementary propositions relating to upper and lower limits

(a) *If* $f_1(\Sigma) \leqq f_2(\Sigma)$, *then* $\overline{S}_\Sigma(f_1) \leqq \overline{S}_\Sigma(f_2)$; $\underline{S}_\Sigma(f_1) \leqq \underline{S}_\Sigma(f_2)$.
(b) $\overline{S}_\Sigma(f_1) + \underline{S}_\Sigma(f_2) \leqq \overline{S}_\Sigma(f_1 + f_2) \leqq \overline{S}_\Sigma(f_1) + \overline{S}_\Sigma(f_2)$.
(c) $\underline{S}_\Sigma(f) = -\overline{S}_\Sigma(-f)$.

---

[10]) It does not suffice to know whether it holds when Σ is an isolated Δ and Σ' consists of two Δ, except in the case of a linear space, $n = 1$, and if the units of the field comprise all possible *segments*. For in this case and substantially in this case alone can any subdivision be reached by successive bisection. This is due to the fact that in one dimension, a simple closed set is always the sum of distinct segments and has for complementary the interior of another simple closed set of the same kind.

From (b) and (c) we deduce in particular:

$$\underline{S}_\Sigma(f_1 - f_2) \leqq \underline{S}_\Sigma(f_1) - \underline{S}_\Sigma(f_2) \leqq \overline{S}_\Sigma(f_1 - f_2);$$
$$\underline{S}_\Sigma(f_1 - f_2) \leqq \overline{S}_\Sigma(f_1) - \overline{S}_\Sigma(f_2) \leqq \overline{S}_\Sigma(f_1 - f_2).$$

And we have the Proposition 1:

As functions of Σ,

$\overline{S}_\Sigma(f)$ *decreases by subdivision,*

$\underline{S}_\Sigma(f)$ *increases by subdivision.*

This is at once evident when it is remembered that sequences of subdivisions of a subdivision of Σ_0 are themselves sequences of subdivisions of Σ_0, though not the converse necessarily.

C. The D of $f(\Sigma)$.

1) $D_{\varrho, P}(f)$ denotes any limit of $\frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}}$ as $\Sigma' \to P$, index ϱ.

2) $\overline{D}_P(f)$, $\underline{D}_P(f)$ are the upper and lower bounds of all $D_{\varrho, P}(f)$ for that P.

The limits which can only be obtained with any degree of approximation by successions of $\Sigma' \to P$ without finite index are left out of account entirely.

We have the usual Elementary propositions relating to upper and lower bounds

(a) *If* $f_1(\Sigma) \leqq f_2(\Sigma)$, *then* $\overline{D}_P(f_1) \leqq \overline{D}_P(f_2)$, $\underline{D}_P(f_1) \leqq \underline{D}_P(f_2)$.

(b) $\overline{D}_P(f_1) + \underline{D}_P(f_2) \leqq \overline{D}_P(f_1 + f_2) \leqq \overline{D}_P(f_1) + \overline{D}_P(f_2)$.

(c) $\underline{D}_P(f) = -\overline{D}_P(-f)$.

Note. $\overline{D}_P(f)$, $\underline{D}_P(f)$ *are functions of* P *of type lul and ulu respectively; more precisely, the greatest and least* $D_{\varrho, P}(f)$ *for given* ϱ *are respectively of type ul and lu.*

By definition, $\overline{D}_P(f)$ is plainly the limit of the greatest $D_{\varrho, P}(f)$ when $\varrho \to \infty$, and this quantity increases with ϱ; similarly for $\underline{D}_P(f)$; so that the second clause does actually imply the first. We therefore proceed to prove the former.

Let $\psi_{a, \varrho}(P)$ be the upper bound of $\frac{f(\Sigma)}{v_\Sigma}$ for all Σ in the sphere of centre P and span a, which belong to P, index $\varrho < \varrho_1$. There is, for each ε, a Σ_0 belonging to P_0, index $\varrho < \varrho_1$, such that

$$\frac{f(\Sigma_0)}{v_{\Sigma_0}} > \psi_{a, \varrho_1}(P_0) - \varepsilon.$$

Also Σ_0 belongs (see Note (c), Section I, E) to P index $\bar{\varrho} < \varrho_1$, for any P distant less than a certain positive α from P_0. Hence, for all such P,

$$\frac{f(\Sigma_0)}{v_{\Sigma_0}} \leqq \psi_{a, \varrho_1}(P).$$

Therefore

$$\psi_{a,\varrho_1}(P) > \psi_{a,\varrho_1}(P_0) - \varepsilon$$

for all P distant less than a certain positive α from P_0. I. e.

$$\psi_{a,\varrho_1}(P) \text{ } \textit{is an } l\textit{-function.}$$

If $a < a_1$, clearly $\psi_{a,\varrho}(P) \leqq \psi_{a_1,\varrho}(P)$. Therefore, when $a \to 0$, $\psi_{a,\varrho}(P)$ describes a descending sequence having for limit the lower bound of $\psi_{a,\varrho}(P)$ for all a; and this limit $\varphi_\varrho(P)$ is an ul-function. Now $\varphi_\varrho(P) = \lim_{a\to 0} \psi_{a,\varrho}(P)$ is the greatest $D_{\varrho,P}(f)$ for that P and that ϱ; in fact, clearly

$$\varphi_\varrho(P) \geqq \text{all } D_{\varrho,P}(f)$$

because when $\Sigma' \to P$, index ϱ, then for all but a finite number of these Σ', $\frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}} \leqq \psi_{a,\varrho}(P)$, whatever value was given to a, and so all limits of $\frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}}$ are $\leqq \varphi_\varrho(P)$. Also

$$\varphi_\varrho(P) \leqq \text{some } D_{\varrho,P}(f)$$

because for each $\psi_{a,\varrho}(P)$ there is a Σ_0, with $\frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}} > \psi_{a,\varrho}(P) - a$ and *a fortiori* $> \varphi_\varrho(P) - a$, which tends to P, index ϱ, when $a \to 0$. There is therefore some $D_{\varrho,P}(f) \geqq \varphi_\varrho(P)$. Thus $\varphi_\varrho(P)$ is the greatest $D_{\varrho,P}(f)$, which is thus shown to be a lu-function of P. By changing f to $-f$, the least $D_{\varrho,P}(f)$ is therefore an ul-function of P. This completes our proof.

And we have the Fundamental lemma:

If at every point of an $\dot{E}$ contained in $\dot{A}$, $D_P(f)$ satisfies one and the same of the following relations:

1) $D_P(f) > h$, 2) $k > \overline{D}_P(f) > h$, 3) $\overline{D}_P(f) = k$, 4) $\overline{D}_P(f) \geqq h$,

5) $k \geqq \overline{D}_P(f) > h$, 6) $k > \overline{D}_P(f) \geqq h$, 7) $k \geqq \overline{D}_P(f) \geqq h$,

then there is a Σ of arbitrarily small norm, whose $\dot{\Sigma}$, interior to $\dot{A}$, is within ε of $\dot{E}$, and which satisfies the corresponding one of the following relations:

1)′ $f(\Sigma) > h v_\Sigma$, 2)′ $k v_\Sigma > f(\Sigma) > h v_\Sigma$, 3)′ $k v_\Sigma + \varepsilon' > f(\Sigma) > k v_\Sigma - \varepsilon$,

4)′ $f(\Sigma) > h v_\Sigma - \varepsilon'$, 5)′ $k v_\Sigma + \varepsilon' > f(\Sigma) > h v_\Sigma$,

6)′ $k v_\Sigma > f(\Sigma) > h v_\Sigma - \varepsilon'$, 7)′ $k v_\Sigma + \varepsilon' > f(\Sigma) > h v_\Sigma - \varepsilon'$.

Here the ε are independent, previously given, arbitrary positive numbers, and h and k any numbers with $k > h$.

The same property holds good for $D_P(f)$ or any $D_{\varrho,P}(f)$ instead of $\overline{D}_P(f)$.

The proof of the fundamental lemma is as follows.

We can leave out of account all but interior points of $\dot{A}$, as the frontier of $\dot{A}$ has zero measure. By definition of $\overline{D}_P(f)$, at every point P interior to $\dot{A}$ where one of the relations 1) to 7) holds good, the corres-

ponding one of

$$1)''\ D_{\varrho,P}(f) > h,\ 2)''\ k > D_{\varrho,P}(f) > h,\ 3)''\ k+\varepsilon'' > D_{\varrho,P}(f) > k-\varepsilon'',$$
$$4)''\ D_{\varrho,P}(f) > h-\varepsilon'',\quad 5)''\ D_{\varrho,P}(f) > h-\varepsilon'',\quad 6)''\ k+\varepsilon'' > D_{\varrho,P} > h,$$
$$7)''\ k+\varepsilon'' > D_{\varrho,P}(f)\, h-\varepsilon''$$

holds for all sufficiently large, but finite, ϱ.

Hence for such a P, there is a succession of Σ', tending to P, index ϱ_P, for each of which $\frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}}$ satisfies the same inequality, when substituted for $D_{\varrho,P}(f)$ there.

From this the lemma follows, choosing $\varepsilon'' < \frac{\varepsilon'}{m(\dot{A})}$ say, — by the fundamental approximation lemma for convergence with finite index (Section I, D. 5.)

Note. As the proof shows, the same lemma also holds, more generally, if for $\overline{D}_P(f)$ is substituted any function of P which at each point of $\dot{E}$ is either a $D_{\varrho,P}(f)$ or a limit of $D_{\varrho,P}(f)$ belonging to that point. Such a function may for brevity be referred to as a *D-function of* $f(\Sigma)$.

We immediately deduce from our fundamental lemma the

Corollary. *If in $\dot{E}$, contained in $\dot{A}$, $\overline{D}_P(f)$ is bounded, then there is a Σ of arbitrarily small norm, whose $\dot{\Sigma}$, interior to $\dot{A}$, is within ε of $\dot{E}$, and for which*

$$(\alpha) \qquad |\, f(\Sigma) - \int_{\dot{E}} \overline{D}_P(f)\, dP \,| < \varepsilon'.$$

The ε are previously given, arbitrary positive numbers, and $\int_{\dot{E}} D_P(f)\, dP$ is the ordinary Lebesgue integral, over the set $\dot{E}$, of the bounded *lul*-function $\overline{D}_P(f)$.

More precisely, given any scale of numbers, $h_1 < h_2 < \ldots < h_{q-1}$, between the bounds h_0 and h_q of $\overline{D}_P(f)$ in $\dot{E}$, there is a Σ of arbitrarily small norm, whose $\dot{\Sigma}$, contained in $\dot{A}$, is within ε of $\dot{E}$, and for which, — *$\dot{E}_i$ denoting the subset of $\dot{E}$ where $\overline{D}_P(f)$ is between h_i and h_{i+1}*, or is equal to h_{i+1}, —

$$(\beta)\quad h_1 m(\dot{E}_1) + h_2 m(\dot{E}_2) + \ldots + h_{q-1} m(\dot{E}_{q-1}) - \varepsilon < f(\Sigma) < h_2 m(\dot{E}_1) + h_3 m(\dot{E}_2) + \ldots + h_q m(\dot{E}_{q-1}) + \varepsilon$$

To prove the latter form of the proposition, from which the former follows by the properties of the Lebesgue integral of any bounded function, analytically definable, first take $\dot{\Sigma}_0$, contained in $\dot{A}$, within ε' of $\dot{E}$, and sum of non-overlapping $\dot{\Sigma}_{i0}$ within $\frac{\varepsilon'}{q}$ of $\dot{E}_i$ (Section I, D 3); then apply

the fundamental lemma, inequality 5), taking as given set the set $\dot{E}_i \dot{\Sigma}_{i0}$, and as containing $\dot{A}$ the set $\dot{\Sigma}_{i0}$, and replacing ε' by $\frac{\varepsilon'}{q}$; thus we get a Σ_i of $\dot{\Sigma}_i$ within $\frac{\varepsilon'}{q}$ of $\dot{E}_i \dot{\Sigma}_{i0}$, or within $\frac{2\varepsilon'}{q}$ of $\dot{E}_i$, of arbitrarily small norm and satisfying

$$h_{i+1} v_{\Sigma_i} + \frac{\varepsilon'}{q} > f(\Sigma_i) > h_i v_{\Sigma_i}$$

or

$$h_{i+1} m(\dot{E}) + \frac{\varepsilon'}{q} \cdot (2h_{i+1} + 1) > h_i m(\dot{E}_i) - \frac{\varepsilon'}{q} \cdot 2h_i .$$

Summing for all i, and assuming $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2h_q + 1}$, we have the desired inequalities (β) for the sum of our $\dot{\Sigma}_i$. The $\dot{\Sigma}_i$ were non-overlapping because contained respectively in the non-overlapping $\dot{\Sigma}_{i0}$.

The preceding corollary may also be stated as follows, by the properties of a Lebesgue integral.

Theorem 0. *If $\overline{D}_P(f)$ is summable over $\dot{E}$, contained in $\dot{A}$, then there is a Σ of arbitrarily small norm, whose $\dot{\Sigma}$, interior to $\dot{A}$, is within ε of $\dot{E}$, and for which.*

$$| f(\Sigma) - \int_{\dot{E}} \overline{D}_P(f)\, dP | < \varepsilon'$$

For $\int_{\dot{E}} D_P(f)\, dP$ can then be approximated to as much as we please by the integral over an $\dot{E}'$, within $\frac{\varepsilon}{2}$ of $\dot{E}$, in which $\overline{D}_P(f)$ is bounded.

III. General theorems. Connection between the S and the D of $f(\Sigma)$.

Theorem 1. *If $\overline{S}_\Delta(|f|)$ is finite, then $\overline{D}_P(f)$, $\underline{D}_P(f)$ are summable over Δ and the integrals of their absolute values do not exceed $\overline{S}_\Delta(|f|)$.*

If suffices to prove the theorem for a non-negative $f(\Sigma)$; for if it is true for $|f|(\Sigma)$, it is true for $f(\Sigma)$, since, as $|f(\Sigma)| \leqq |f|(\Sigma)$,

$$|\overline{D}_P(f)| \leqq \overline{D}_P(|f|); \quad |\underline{D}_P(f)| \leqq \overline{D}_P(|f|).$$

For a never-negative $f(\Sigma)$ the result is deduced as follows. We first prove the property, necessary for the summability of $\overline{D}_P(f)$, that the set $\dot{E}_\infty$ where $\overline{D}_P(f)$ is not finite has measure zero. From the fundamental lemma of last section, inequality 1., we conclude that there is a Σ of arbitrarily small norm, whose $\dot{\Sigma}$, interior to $\dot{A}$, is within $\frac{\varepsilon}{h}$ of $\dot{E}_h$, — the set in which $\overline{D}_P(f) > h$ in $\dot{A}$, — and for which

$$f(\Sigma) > h v_\Sigma > h\left(m(\dot{E}_h) - \frac{\varepsilon}{h}\right) > h\, m(\dot{E}_\infty) - \varepsilon .$$

since $\dot{E}_h$ contains $\dot{E}_\infty$.

Complete Σ (property 4) of the perfect field) to a subdivision Σ' of Δ of same norm ν_Σ. As $f(\Sigma)$ it never-negative, and Σ is part of Σ',

$$f(\Sigma') \geqq f(\Sigma) > h\, m(\dot{E}_\infty) - \varepsilon$$

The norm of Σ, which was arbitrarily small, may be assumed so chosen that

$$f(\Sigma') < \overline{S}_\Delta(f) + \varepsilon.$$

Hence for every h,

$$\overline{S}_\Delta(f) > h\, m(\dot{E}_\infty) - 2\varepsilon.$$

As $\overline{S}_\Delta(f)$ is assumed finite, and h is now the only variable, this implies $m(\dot{E}_\infty) = 0$.

From the Corollary of the fundamental lemma we next deduce in a similar manner:

$$\overline{S}_\Delta(f) \geqq \int_{\dot{\Delta} - \dot{E}_\infty} \overline{D}_P(f)\, dP.$$

For the Σ there constructed, with $\dot{A} = \dot{\Delta}$, can be completed to a subdivision Σ' of Δ, — of norm ν_Σ, — for which therefore

$$f(\Sigma') > \int_{\dot{E}} \overline{D}_P(f)\, dP - \varepsilon'.$$

Letting ν_Σ describe a sequence tending to zero,

$$\overline{S}_\Delta(f) > \int_{\dot{E}} \overline{D}_P(f)\, dP - 2\varepsilon'.$$

Here $\dot{E}$ is any set in which $\overline{D}_P(f)$ is bounded, and ε' is arbitrary. Whence the result.

This completes the proof of the summability of the $\overline{D}_P(f)$, when $f(\Sigma)$ is never negative, and therefore establishes the theorem in its general form.

Theorem 0 at the end of section II gives at once the

Corollary. *If* $\overline{S}_\Delta(|f|)$ *is finite, then there is a* Σ *of arbitrarily small norm, whose* $\dot{\Sigma}$, *interior to* $\dot{\Delta}$, *is within* ε *of* $\dot{\Delta}$, *and for which*

$$|f(\Sigma) - \int_{\dot{\Delta}} \overline{D}_P(f)\, dP| < \varepsilon'.$$

Theorem II. *If* $\overline{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *are everywhere finite, then*

$$\overline{D}_P\{\overline{S}_\Sigma(f)\} \leqq \overline{D}_P(f); \quad \underline{D}_P\{\underline{S}_\Sigma(f)\} \geqq \underline{D}_P(f).$$

More precisely, if $\overline{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *are everywhere finite, all their* $D_{\varrho, P}$ *are also values of* $D_{\varrho, P}(f)$ *for the same* ϱ *and* P.

By definition of $\overline{S}$, for each Σ there exists a Σ', with $\dot{\Sigma}' = \dot{\Sigma}$, for which

$$|\overline{S}_\Sigma(f) - f(\Sigma')| < \varepsilon v_\Sigma, \qquad \text{or} \qquad \left|\frac{\overline{S}_\Sigma(f)}{v_\Sigma} - \frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}}\right| < \varepsilon.$$

If $\Sigma \to P$, index ϱ, so does Σ'. As we can choose a succession of such Σ for which $\frac{\overline{S}_\Sigma(f)}{v_\Sigma}$ tends to any chosen $D_{\varrho,P}$ of $\overline{S}(f)$, and a subsequence of that, for which the corresponding $\frac{f(\Sigma')}{v_{\Sigma'}}$ tends to a limit, we are certain that given any $D_{\varrho,P}$ of $\overline{S}_\Sigma(f)$, there is a $D_{\varrho,P}$ of $f(\Sigma)$, with same ϱ and P, differing from it by less than ε; hence there is one coinciding with it, for a limit of $D_{\varrho,P}$ (constant ϱ and P) is itself a $D_{\varrho,P}$, by the diagonal method.

From Theorems I and II we can deduce the following

If $f(\Sigma)$ is never negative in $\dot{\Delta}$ and $\overline{S}_\Delta(f)$ is finite, then the $\overline{D}_P$ and $\underline{D}_P$ of $\overline{S}_\Sigma(f)$ coincide, and equal $\overline{D}_P(f)$, p. p. in $\dot{\Delta}$; or, more precisely, wherever $\overline{D}_P(f)$ equals the derivative of its integral.

For the proof, we use Theorem I, to deduce $\overline{S}_\Sigma(f) \geqq \int_{\dot{\Sigma}} \overline{D}_P(f)\, dP$ everywhere in $\dot{\Delta}$, as $f(\Sigma)$ is never negative, i. e. equals $|f|(\Sigma)$; divide both sides of this inequality by $v_\Sigma = m(\dot{\Sigma})$ and make $\Sigma \to P$, index ϱ. The ratio on the right is known to have a unique limit for almost all P in $\dot{\Delta}$, and this limit (the derivative of the integral) is equal to $\overline{D}_P(f)$ almost everywhere; at such a P, we have therefore

$$\underline{D}_P(\overline{S}_\Sigma(f)) \geqq \overline{D}_P(f).$$

And we have from Theorem II,

$$\overline{D}_P(\overline{S}_\Sigma(f)) \leqq \overline{D}_P(f).$$

This implies the required equality, at P.

As a Corollary, we may at once state:

If $F(\Sigma)$ is unchanged by subdivision and bounded, then

$$\overline{D}_P(F) = \underline{D}_P(F) \quad \text{p. p. in } \dot{\Delta}.$$

And both are summable over $\dot{\Delta}$.

For the proof of the coincidence p. p., we anticipate Section V, where it is shown that a function unchanged by subdivision and bounded is the difference of two non-negative such functions.

The summability results from the fact that a bounded function always has bounded $\overline{S}$, while the boundedness of $F(\Sigma)$ involves that of $|F|(\Sigma)$.

IV. Functions whose $\overline{S}_\Sigma$ and $\underline{S}_\Sigma$ are unchanged by subdivision and bounded.

Functions whose $\overline{S}_\Sigma$ are unchanged by subdivision and finite possess the following property:

Given in $\dot{\Delta}$ any succession of Σ whose norms tend to zero, we have for all but a finite number of them

$$f(\Sigma) < \overline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon,$$

Complete Σ to a subdivision of Δ, choosing the additional part σ of norm less than ν_Σ. Replace σ by a subdivision σ' of σ for which ($\overline{S}_\sigma(f)$ being finite)

$$f(\sigma') > \overline{S}_\sigma(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

As $\nu_{\Sigma+\sigma'} = \nu_\Sigma$ tends to zero, we have for all but a finite number of the $(\Sigma + \sigma')$,

$$f(\Sigma + \sigma') < \overline{S}_\Delta(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

And as $f(\Sigma + \sigma') = f(\Sigma) + f(\sigma')$, these inequalities imply, for all but a finite number of the Σ,

$$f(\Sigma) < \overline{S}_\Delta(f) - \overline{S}_\sigma(f) + \varepsilon.$$

This for any $f(\Sigma)$ whose $\overline{S}_\Sigma(f)$ is finite everywhere in $\dot{\Delta}$.

If then $\overline{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision, so that

$$\overline{S}_\Delta(f) - \overline{S}_\sigma(f) = \overline{S}_\Sigma(f),$$

we deduce the required property.

We have of course the parallel one, replacing f by $-f$, *for functions whose $\underline{S}_\Sigma$ are unchanged by subdivision and finite.*

The property leads at once to the theorem, which takes the place of Theorem II:

Theorem III. *If $\overline{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision, and $\overline{S}_\Sigma(|f|)$ finite in $\dot{A}$, then*

$$D_P(\overline{S}_\Sigma(f)) = \overline{D}_P(f) \quad p.\,p.\ in\ \dot{A}.$$

If $\underline{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision, and $\overline{S}_\Sigma(|f|)$ finite in $\dot{A}$, then

$$D_P(\underline{S}_\Sigma(f)) = \underline{D}_P(f) \quad p.\,p.\ in\ \dot{A}.$$

More precisely, these equalities hold wherever the quantities on both sides are finite and equal to the derivatives of their Lebesgue integrals.

For the proof of Theorem III we use the proposition at the end of last section, and Theorem II.

Let Σ describe a succession with $\nu_\Sigma \to 0$, each Σ satisfying the requirements of the proposition just referred to. For all, therefore

$$f(\Sigma) > \int_{\dot{I}} \bar{D}_P(f)\, dP - \varepsilon'.$$

For all but a finite number, therefore, by the above property of functions whose $\bar{S}_\Sigma$ are unchanged by subdivision and finite,

$$\bar{S}_\Sigma(f) > \int_{\dot{A}} \bar{D}_P(f)\, dP - 2\varepsilon'.$$

Therefore in every $\dot{A}$ there is a Σ, with $\dot{\Sigma}$ within εv_A of $\dot{A}$, for which

$$\bar{S}_\Sigma(f) > \int_{\dot{A}} \bar{D}_P(f)\, dP - \varepsilon v_A$$

or

$$\frac{\bar{S}_\Sigma(f)}{v_\Sigma} > \frac{\int_{\dot{A}} \bar{D}_P(f)\, dP}{v_A} - \varepsilon.$$

Letting $A \to P$, index 2, for instance, and making $\varepsilon \to 0$ simultaneously $\left(\text{so that in particular } \frac{v_A}{v_\Sigma} \to 1\right)$ we have the corresponding Σ describing a succession tending to P, index 2. The fraction on the right being assumed to tend to a finite limit, as it does p. p., equal $\bar{D}_P(f)$, we therefore certainly have $\bar{D}_P(\bar{S}(f)) \geqq \bar{D}_P(f)$ and so by Theorem I, $\bar{D}_P(\bar{S}_\Sigma(f)) = \bar{D}_P(f)$ at that point. Also as $\bar{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision and bounded, its $\bar{D}_P$, $\underline{D}_P$ coincide p. p. Whence the result.

A particular class of functions whose $\bar{S}$ and $\underline{S}$ are unchanged by subdivision is that of *the functions whose $\bar{S}$ and $\underline{S}$ coincide.* (For then these both increase and decrease by subdivision.) For these Theorem III takes the form:

Theorem IV. *If $\bar{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ coincide everywhere in $\dot{A}$, and $\bar{S}_\Sigma(|f|)$ is finite, then $\bar{D}_P(f)$ and $\underline{D}_P(f)$ coincide p. p. in $\dot{A}$, and*

$$D_P(S_\Sigma(f)) = D_P(f) \quad p.\ p.$$

where D stands for coincident $\bar{D}$ and $\underline{D}$, and S for coincident $\bar{S}$ and $\underline{S}$.

V. Functions which increase or decrease by subdivision.

Theorem V. *If $f(\Sigma)$ increases by subdivision, then $S_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision.*

For let Σ_0 be any fixed subdivision of A. Let Σ' be any subdivision of A, and Σ_0' be obtained from it by superposition of Σ_0 (Section Ic,

Def. 4). As Σ_0' is a subdivision of Σ',

$$f(\Sigma_0') \geqq f(\Sigma').$$

Let Σ' describe a sequence of subdivisions for which $f(\Sigma')$ tends to $\bar{S}_\Delta(f)$. Σ_0' describes a sequence of subdivisions of Σ_0, and so $f(\Sigma_0')$ becomes $\leqq \bar{S}_{\Sigma_0}(f)$ in the limit. Thus

$$\bar{S}_{\Sigma_0}(f) \geqq \bar{S}_\Delta(f).$$

But $\bar{S}_\Sigma(f)$ decreases by subdivision. Hence $\bar{S}_{\Sigma_0}(f) = \bar{S}_\Delta(f)$ q. e. d.
And we have the parallel statement, changing f to $-f$,

If $f(\Sigma)$ decreases by subdivision, then $\underline{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision.

Theorem V may be supplemented as follows.

Theorem VI. *If $f(\Sigma)$ increases by subdivision, then $\bar{S}_1(\underline{S}_\Sigma(f)) = \bar{S}_\Delta(f)$.*

Choose a subdivision Σ_0 of Δ so that $f(\Sigma_0) > \bar{S}_\Delta(f) - \varepsilon$, supposing $\bar{S}_\Delta(f)$ finite. As $f(\Sigma)$ increases by subdivision, we have, a fortiori, for that Σ_0,

$$\underline{S}_{\Sigma_0}(f) > \bar{S}_\Delta(f) - \varepsilon.$$

The norm of Σ_0 may be made arbitrarily small. So certainly

$$\bar{S}_\Delta(\underline{S}_\Sigma(f)) > \bar{S}_\Delta(f) - 2\,\varepsilon.$$

Also $\bar{S}_\Delta(\underline{S}_\Sigma(f)) \leqq \bar{S}_1(\bar{S}_\Sigma(f))$, which is $\bar{S}_\Delta(f)$, by Theorem V. The required equality follows, — for ε is arbitrary, — in case $\bar{S}_\Delta(f)$ is finite or $-\infty$. If $\bar{S}_\Delta(f) = +\infty$, it follows in the analogous manner that $\bar{S}(\underline{S}_\Sigma(f)) = +\infty$, q. e. d.

We have of course the parallel

If $f(\Sigma)$ decreases by subdivision, then $\underline{S}_1(\bar{S}_\Sigma(f)) = \underline{S}_1(f)$.

Let us at once deduce the Corollary

Theorem VII. *If $f(\Sigma)$ increases by subdivision, and $\underline{S}_\Sigma(f)$ be known not to change by subdivision,*

or if $f(\Sigma)$ decreases by subdivision, and $\bar{S}_\Sigma(f)$ be known not to change by subdivision,

then all $S_\Delta(f)$ coincide.

We close this section with the following

Theorem VIII. *If $f(\Sigma)$ increases or decreases by subdivision and $\bar{S}_\Sigma(|f|)$ is finite in A, then $f(\Sigma)$, $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ have the same coincident D_P p. p. in A.*

We give the proof for $f(\Sigma)$ increasing by subdivision.

Consider the difference $\bar{S}_\Sigma(f) - \underline{S}_\Sigma(f)$. It is non-negative and has for $\underline{S}_\Delta$, in view of Theorems V and VI, and the elementary propositions

for $\bar{S}$ and $\underline{S}$,

$$\bar{S}_{\Delta}(f) - \bar{S}_{\Delta}(f) = 0 .$$

So by Theorem II, its D_P, which cannot be negative, is zero; *i. e.*

$$\underline{D}_P\{\bar{S}_{\Sigma}(f) - \underline{S}_{\Sigma}(f)\} = 0 .$$

Now $\bar{S}_{\Sigma}(f) - \underline{S}_{\Sigma}(f)$ is, in view of Theorem V, the $\bar{S}$ of $(\bar{S}_{\Sigma}(f) - f(\Sigma))$. This last function is non-negative; referring to the property of non-negative functions recorded towards the end of section III, we infer that all the D_P of its $\bar{S}_{\Sigma}$ coincide p. p. and equal its $\bar{D}_P$. Thus

$$\bar{D}_P(\bar{S}_{\Sigma}(f) - f(\Sigma)) = \text{all } D_P\{\bar{S}_{\Sigma}(f) - \underline{S}_{\Sigma}(f)\} = 0 \quad \ldots \text{ p. p. in } \dot{A}.$$

Also Theorem III, applied to $f(\Sigma)$, in virtue of Theorem V and the finiteness of $\bar{S}_{\Sigma}(|f|)$, gives

$$\text{all } D_P\{\bar{S}_{\Sigma}(f)\} = \bar{D}_P(f) \quad \ldots \text{ p. p. in } \dot{A}.$$

We deduce

$$D_P(\bar{S}_{\Sigma}(f)) = D_P(\underline{S}_{\Sigma}(f)) = \bar{D}_P(f) = \underline{D}_P(f) \quad \ldots \text{ p. p. in } \dot{A}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Example illustrating Theorems V and VII. Non-negative function increasing by subdivision whose $\underline{S}_{\Delta}(f)$ is not unchanged by subdivision.

Field of units Δ corresponding to all wedges.

$f(\Delta) = 0$ for rational Δ (whose corners have rational coordinates),

$f(\Delta) = 1$ for non-rational Δ.

If Σ is a subdivision of a rational Δ, $f(\Sigma) \geqq 0 = f(\Delta)$.

If Σ is a subdivision of a non-rational Δ, it has at least one non-rational Δ (one with a non-rational corner of Δ); and so $f(\Sigma) \geqq 1 = f(\Delta)$.

Thus $f(\Sigma)$ increases by subdivision.

Any Δ can be subdivided, to Σ, so that $f(\Sigma) \geqq 1$; hence any Δ can be subdivided, to Σ, so that $f(\Sigma) \geqq N$, for any N. So

$$\bar{S}_{\Sigma}(f) = +\infty \quad \textit{everywhere}.$$

Any rational Δ can be subdivided into a system of rational Δ (a rational Σ),

For a rational Δ, therefore, $\underline{S}_{\Delta}(f) = 0$.

If Δ is non-rational, it has at least one non-rational corner P_i, and so one at least of the edges P_iP_k is non-rational, i. e. contains at most one rational point. The non-rational Δ with corners on this edge become therefore, as $r_{\Sigma} \to 0$, infinitely numerous. So $f(\Sigma) \to +\infty$, for every sequence of subdivisions of Δ. I. e.

For a non-rational Δ, $\underline{S}_{\Delta}(f) = +\infty$.

It is at once clear that $\bar{S}\{\underline{S}_{\Delta}(f)\} = +\infty$, in accordance with Theorem VI.

Canonical expression of bounded functions increasing or decreasing or unchanged by subdivision.

The positive part of a function increasing by subdivision also increases by subdivision.

Let $\varphi(\Sigma)$ be the positive part of $f(\Sigma)$, *i. e.* the function defined by

$$\varphi(\Delta) = f(\Delta) \quad \text{when } > 0 \text{ and otherwise } 0.$$

In all cases,

$$\varphi(\Sigma) \geqq f(\Sigma); \quad \text{and} \quad \varphi(\Sigma) \geqq 0.$$

Let Σ denote any subdivision of Δ. There are two possibilities resulting from the definition of $\varphi(\Sigma)$.

1) $\varphi(\Delta) = 0$; as $\varphi(\Sigma) \geqq 0$, we then have $\varphi(\Sigma) \geqq \varphi(\Delta)$.

2) $\varphi(\Delta) = f(\Delta)$, as $\varphi(\Sigma) \geqq f(\Sigma) \geqq f(\Delta)$, we again have $\varphi(\Sigma) \geqq \varphi(\Delta)$.

Thus in all cases, if Σ is a subdivision of Δ, $\varphi(\Sigma) \geqq \varphi(\Delta)$; q. e. d.

A bounded function $f(\Sigma)$ increasing by subdivision is the difference of two non-negative functions, one unchanged by subdivision and bounded, the other decreasing by subdivision.

This is equivalent to the proposition that a finite non-negative function unchanged by subdivision, and nowhere less than $f(\Sigma)$, exists. Now this is obvious, since the positive part of $f(\Sigma)$,

$$\varphi(\Sigma) \geqq f(\Sigma),$$

increases by subdivision, and therefore has $\overline{S}_\Sigma(\varphi)$ unchanged by subdivision, non-negative, and $\geqq f(\Sigma)$; also bounded, since $f(\Sigma)$ and therefore $\varphi(\Sigma)$ are bounded.

The expression of a function $f(\Sigma)$ increasing by subdivision as the difference of

$$F_1(\Sigma) = \overline{S}_\Sigma(\varphi), \qquad f_2(\Sigma) = \overline{S}_\Sigma(\varphi) - f(\Sigma)$$

where $\varphi(\Sigma)$ is the positive part of $f(\Sigma)$, will be called the *canonical expression of* $f(\Sigma)$. $F_1(\Delta)$ is the upper bound of $\varphi(\Sigma)$ in Δ; for $\varphi(\Sigma)$ increases by subdivision and is non-negative. The upper bound of $\varphi(\Sigma)$, if > 0, coincides with that of $f(\Sigma)$. Hence we may say that:

The positive part $F_1(\Delta)$ of the canonical expression of $f(\Delta)$ is the upper bound of $f(\Sigma)$ in Δ, if positive, and otherwise zero. We have already shown that it was unchanged by subdivision[11]).

If $f(\Sigma)$, more particularly, was unchanged by subdivision, then so are *both* parts of its canonical expression.

A bounded function unchanged by subdivision is the difference of two non-negative functions unchanged by subdivision.

---

[11]) Cf. the usual expression of a completely additive function of $\dot{E}$, as the difference of two such non-negative functions, in De La Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue etc., p. 84.

In this case the two parts of the canonical expression

$$F_1(\Sigma) - F_2(\Sigma)$$

are respectively (since $F(\Sigma) = S_\Sigma(F) = \overline{S}_\Sigma(\Phi) - \overline{S}_\Sigma(\Psi)$),

$$F_1(\Sigma) = \overline{S}_\Sigma(\Phi),$$
$$-F_2(\Sigma) = -\overline{S}_\Sigma(\Psi) = \underline{S}_\Sigma(-\Psi)$$

where $\Phi(\Sigma)$ and $-\Psi(\Sigma)$ are the positive and negative parts of $F(\Sigma)$; and

$F_1(\Delta)$ *is the upper bound of* $F(\Sigma)$ *in* Δ, *if positive, and otherwise* 0,
$-F_2(\Delta)$ *is the lower bound of* $F(\Sigma)$ *in* Δ, *if negative, and otherwise* 0.

The canonical expression of $-F(\Sigma)$ is $F_2(\Sigma) - F_1(\Sigma)$.

When $f(\Sigma)$ decreases by subdivision and is bounded, we may accordingly *define* as the *canonical expression of* $f(\Sigma)$ that of $-f(\Sigma)$, with opposite signs.

VI. Specialisation of $f(\Sigma)$.

We denote by $\dot{F}$ any *face* of a Δ, or portion of its frontier lying in one plane.

Condition 00. For every fixed $\dot{F}$, *when* $\lim \dot{\Sigma}$ *is contained in* $\dot{F}$, *and* $\nu_\Sigma \to 0$ *and* Σ' *is any subdivision of* Σ, then

$$\lim |f(\Sigma') - f(\Sigma)| = 0 \quad \text{and} \quad \overline{\lim}\, |f(\Sigma)| < +\infty;$$

or, *the limits of* $f(\Sigma)$ *are finite and unchanged by subdivision; and for any point* P, *when* $\lim \dot{\Sigma} = P$,

$$\overline{\lim}\, |f|(\Sigma) < +\infty \text{ [12]}.$$

Condition 10. For every fixed $\dot{F}$, *when* $\lim \dot{\Sigma}$ *is contained in* $\dot{F}$, *and* $\nu_\Sigma \to 0$ then

$$\lim |f|(\Sigma) = 0;$$

and for any point P, *when* $\lim \dot{\Sigma} = P$,

$$\overline{\lim}\, |f|(\Sigma) < +\infty \text{ [12]}.$$

Condition 20. $\lim\limits_{(w_\Sigma, \nu_\Sigma) \to (0,0)} |f|(\Sigma) = 0.$

Condition 30. $\lim\limits_{(v_\Sigma, \nu_\Sigma) \to (0,0)} |f|(\Sigma) = 0.$

Note. These conditions are successive specialisations of one another; if one is fulfilled, so are the preceding. The last two represent our double generalisation to $f(\Sigma)$ of the condition of "absolute continuity" in the theory of one-dimensional "additive functions of intervals". Cf. the following remarks.

[12]) The latter clause is used only in Theorem X.

If $f(\Sigma)$ is unchanged by subdivision and satisfies one of the above conditions, it satisfies the parallel one of the following more stringent conditions.

Condition 01. If $\lim \dot{\Sigma}$ is contained in $\dot{F}$, all limits of $f(\Sigma)$ are finite and unchanged by subdivision; and the limits of $|f|(\Sigma)$ when $\dot{\Sigma}$ decreases to any single point are finite.

Condition 11. If $\lim \dot{\Sigma}$ is contained in $\dot{F}$, then $|f|(\Sigma) \to 0$; and the limits of $|f|(\Sigma)$ when $\dot{\Sigma}$ decreases to any single point are finite.

Condition 21. If $w_\Sigma \to 0$, then $|f|(\Sigma) \to 0$.

Condition 31. If $v_\Sigma \to 0$, then $|f|(\Sigma) \to 0$.

Note. The last, and most special of all our conditions is the exact equivalent of the condition of "absolute continuity" of $f(\Sigma)$, regarded as an "additive function of intervals", when the field is built up from rectangular intervals, as $\dot{\Delta}$. It has also, or what is substantially equivalent to it, been called the condition of absolute continuity for the more general $f(\Sigma)$, in that field, regarded as a "non-additive function of intervals", e. g. by J. C. Burkill, loc. cit. p. 286. Cf. introduction (p. 7).

It will at once appear that *results proved with the assumption that $f(\Sigma)$ satisfies* (31) *only involve the fulfilment of* (30). This, then, becomes the true parallel of the condition of "absolute continuity" as formulated in the theory of "additive functions of intervals". As however, it does not imply any property of *continuity properly so-called*, that term will be avoided in connection with it. It has been usual[13]), it is true, to define continuity of a function of intervals by the characteristic that the value of the function tends to zero when the "diameter" (read: span) of the argument tends to zero, and (31) is a special case of this. But this does not accord with our primitive ideas of continuity and is really only a *criterion for continuity, when the function is additive and one-dimensional.* In more dimensions it is not even sufficient unless we read "width" for "diameter". This if we adopt the natural definition of continuity

$$\lim_{\Sigma' \to \Sigma} f(\Sigma') = f(\Sigma),$$

where the process $\Sigma' \to \Sigma$ has of course first to be precisely defined. We will consider these definitions at the end of this section, after the conditions just stated have found justification in immediate results.

We have at once the Elementary propositions:

1) If one of the conditions is satisfied by both $f_1(\Sigma)$ and $f_2(\Sigma)$, it is satisfied by their difference and by their sum. In particular, if it is satisfied by the positive and negative parts of $f(\Sigma)$, it is satisfied by $f(\Sigma)$.

2) If one of the conditions, other than 00 or 01, is satisfied by $f(\Sigma)$, it is satisfied by any $f_1(\Sigma)$ with

$$|f_1|(\Sigma) \leqq |f|(\Sigma)\ ^{14}).$$

---

[13]) Cf. J. C. Burkill, loc. cit. p. 277.

[14]) For this it suffices that $|f_1(\Sigma)| \leqq |f(\Sigma)|$, as follows by addition from a single Δ.

In particular, if it is satisfied by $f(\Sigma)$, it is satisfied by its positive and negative parts.

The fundamental lemma of this section is:

If $f(\Sigma)$ satisfies condition 00, we do not alter the limits of $f(\Sigma)$ for any sequence of subdivisions of Δ_0 if we superpose an arbitrary Σ_0 on this sequence.

Let $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \ldots, \dot{F}_q$ be the faces of all the $\dot{\Delta}$ whose Δ constitute Σ_0. The Δ of Σ which are changed by the superposition of Σ_0 are distributed in q strips of width $2\nu_\Sigma$, each containing one of these $\dot{F}_i$; we may group them into q sets $\dot{\sigma}_i$, each of which tends to the corresponding $\dot{F}_i$ as $\nu_\Sigma \to 0$; if $\dot{\sigma}_i'$ be obtained from σ_i by superposition of Σ_0, it is a subdivision of σ_i; hence

$$\lim |f(\sigma_i') - f(\sigma_i)| = 0 \qquad \text{as } \nu_\Sigma \to 0.$$

Thus if σ denote the sum of these σ_i, σ' that of the σ_i', $(i = 1, 2, \ldots, q)$,

$$\lim |f(\sigma') - f(\sigma)| = 0 \qquad \text{as } \nu_\Sigma \to 0.$$

As the remaining part, $\Sigma - \sigma$, of Σ is not altered by the superposition of Σ_0, the amount by which the latter alters $f(\Sigma)$ is precisely $f(\sigma') - f(\sigma)$, which tends to zero, q. e. d.

Theorem IX. *If $f(\Sigma)$ satisfies condition 00, then $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are unchanged by subdivision.*

For the lemma, applied to a sequence of subdivisions of Δ_0 for which $f(\Sigma)$ tends to $\bar{S}_{\Delta_0}(f)$, implies, for any subdivision Σ_0 of Δ,

$$\bar{S}_{\Sigma_0}(f) \geqq \bar{S}_{\Delta_0}(f).$$

On the other hand, as we already know, $\bar{S}_{\Sigma_0}(f)$ decreases by subdivision. Thus $\bar{S}_{\Sigma_0}(f) = \bar{S}_{\Delta_0}(f)$. And similarly, or putting $-f$ for f, $\underline{S}_{\Sigma_0}(f) = \underline{S}_{\Delta_0}(f)$, q. e. d.

Theorem X. *If $f(\Sigma)$ satisfies condition 00, then $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are everywhere finite.*

$\bar{S}_\Sigma(f)$ cannot be infinite; for as it is unchanged by subdivision, there would be a Δ in every subdivision of Σ for which $\bar{S}_\Delta(f)$ was infinite; we could therefore pick out a succession of such Δ, whose $\dot{\Delta}$ converged to a single point as limit; and we could subdivide each of these Δ_i to a Σ_i for which $f(\Sigma_i) > i$, $\nu_{\Sigma_i} < \frac{1}{i}$; the succession of $\dot{\Sigma}_i$, which decreases to P as limit, has $f(\Sigma_i)$ not tending to a finite limit, contrary to 00.

Theorem XI. *If one of the conditions is satisfied by $f(\Sigma)$, it is satisfied by $\bar{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$.*

We give the proof, as before, for $\bar{S}_\Sigma(f)$. It follows for $\underline{S}_\Sigma(f)$.

We use the property, characteristic of $\bar{S}_\Sigma(f)$ when finite, (as we have just proved it to be) that for every Σ there is a Σ' subdivision of Σ, for which

$$|f(\Sigma') - \bar{S}_\Sigma(f)| < \varepsilon.$$

If Σ describes any of the successions implied in the statements of the conditions, Σ' describes a similar succession, and we may arrange that, simultaneously, $\varepsilon \to 0$. In all cases except 00 and 01, $f(\Sigma') \to 0$, and so $\bar{S}_\Sigma(f)$ also $\to 0$, proving the statement for those cases. As $\bar{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision, 00 and 01 are equivalent for it; and if $\dot{\Sigma}$ has unique limit contained in $\dot{F}$, so has $\dot{\Sigma}'$; $f(\Sigma')$ has finite limits and so therefore does $\bar{S}_\Sigma(f)$, which is all that requires proof. q. e. d.

When 00 or 01 are not involved, we can at once state more.

If $f(\Sigma)$ satisfies one of the conditions, other than 00 *or* 01[15]*, then $\bar{S}_\Sigma(|f|)$ satisfies it, is unchanged by subdivision and finite, hence bounded in every Δ.*

For in this case the same condition is satisfied by $|f|(\Sigma)$, and Theorems IX, X, XI apply to this function. As $\bar{S}_\Sigma(|f|)$ descreases by subdivision and is non negative, it is bounded in any Δ if finite.

If $f(\Sigma)$ satisfies one of the conditions, other than 00 *or* 01[15]*, then $\bar{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ are bounded in every Δ, unchanged by subdivision and satisfy the same condition.*

The boundedness follows from $|\bar{S}_\Sigma(f)| \leqq \bar{S}_\Sigma(|f|)$ and the preceding proposition. The other properties are already expressed in Theorems IX and XI.

In the case of the first set of conditions we have a converse:

If $\bar{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ are unchanged by subdivision and bounded, and satisfy one of the first set of conditions other than 00*, then $f(\Sigma)$ also satisfies it.*

This is a consequence of the special property of functions whose $\bar{S}$ and $\underline{S}$ are unchanged by subdivision and finite; namely that if Σ describes any succession *with* $\nu_\Sigma \to 0$, then for all but a finite number of these Σ,

$$\underline{S}_\Sigma(f) - \varepsilon < f(\Sigma) < \bar{S}_\Sigma(f) + \varepsilon.$$

For in any of the successions in question in the various conditions, $\nu_\Sigma \to 0$. By the hypothesis, $\underline{S}_\Sigma(f)$ and $\bar{S}_\Sigma(f)$ tend to 0, when Σ describes such successions, both for Σ and for any part of Σ, in particular that part for which $f(\Sigma') = \varphi(\Sigma)$ and the other part for which $f(\Sigma'') = \psi(\Sigma)$. Hence both $\varphi(\Sigma)$ and $\psi(\Sigma)$ and hence their sum $|f|(\Sigma)$, tend to zero, and $f(\Sigma)$ therefore satisfies the relative condition.

[15]) Actually the property remains true also in the case of 00 or 01, by our final theorem in small print below.

Note. If $f(\Sigma)$ is *non-negative*, the proof of this proposition also holds if only $\overline{S}_\Sigma(f)$ is known to be unchanged by subdivision and finite (therefore bounded in any Δ) and to satisfy one of the conditions in question.

When $\overline{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ coincide we have a more general result:

If $S_\Sigma(f)$ is unique and finite, and satisfies any one of the conditions of the first set, then so does $f(\Sigma)$.

For in that case, when Σ describes any succession, with norm tending to zero, $f(\Sigma)$ and $S_\Sigma(f)$ have the same limits.

Note. Condition (00) may be split up into two conditions.

(00)′ For every succession of Σ, with $\nu_\Sigma \to 0$, for which $\lim \dot{\Sigma}$ lies in an $\dot{F}$, $f(\Sigma)$ has finite limits, which are at most increased if each Σ is replaced by one of its subdivision; and the limits of $|f|(\Sigma)$ when $\lim \dot{\Sigma} = P$ are finite.

(00)″ For every succession of Σ, with $\nu_\Sigma \to 0$, for which $\lim \dot{\Sigma}$ lies in an $\dot{F}$, $f(\Sigma)$ has finite limits, which are at most decreased if each Σ is replaced by one of its subdivision; and the limits of $|f|(\Sigma)$ when $\lim \dot{\Sigma} = P$ are finite.

The corresponding complementary forms of Theorem IX are

Theorem IX′. *If $f(\Sigma)$ satisfies (00)′, then $\overline{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision.*

Theorem IX″. *If $f(\Sigma)$ satisfies (00)″, then $\underline{S}_\Sigma(f)$ is unchanged by subdivision.*

The second form is deduceable from the first by putting $-f(\Sigma)$ for $f(\Sigma)$. The first is a consequence of the modified fundamental lemma:

If $f(\Sigma)$ satisfies (00)′, we can only increase the limits of $f(\Sigma)$ for any sequence of subdivisions of Δ_0 if we superpose an arbitrary Σ_0 on this sequence.

The only change in the proof of the fundamental lemma is in the fact that

$$\lim_{\nu_\Sigma \to 0} (f(\Sigma') - f(\Sigma)) = \lim_{\nu_\Sigma \to 0} (f(\sigma') - f(\sigma)) = 0$$

is now replaced by

$$\underline{\lim}_{\nu_\Sigma \to 0} (f(\Sigma') - f(\Sigma)) = \underline{\lim}_{\nu_\Sigma \to 0} (f(\sigma') - f(\sigma)) \geqq 0,$$

whence the statement as above. — We then deduce $\overline{S}_{\Sigma_0}(f) \geqq \overline{S}_{\Delta_0}(f)$, as in Theorem IX, and therefore $\overline{S}_{\Sigma_0}(f) = \overline{S}_{\Delta_0}(f)$ as required in Theorem IX′.

We can prove that.

If $f(\Sigma)$ satisfies (00)′, then so does its positive part.

Let Σ describe any succession with $\nu_\Sigma \to 0$, and $\lim \dot{\Sigma}$ lying in $\dot{F}$. Let Σ_1 be the part of Σ for which $f(\Sigma_1) = \varphi(\Sigma)$. Let Σ' be any subdivision of Σ, and Σ_1', the part of it which is a subdivision of Σ_1. We then have

$$\varphi(\Sigma') \geqq \varphi(\Sigma_1') \geqq f(\Sigma_1').$$

As Σ describes the succession, Σ_1 describes a similar succession; hence, as $f(\Sigma)$ satisfies (00)′, $f(\Sigma_1)$ has finite limits, and

$$\underline{\lim} (f(\Sigma_1') - f(\Sigma_1)) \geqq 0.$$

It follows that $\varphi(\Sigma)$ has finite limits and

$$\underline{\lim} (\varphi(\Sigma') - \varphi(\Sigma)) \geqq 0,$$

q. e. d.

We have therefore the following

Theorem. *If $f(\Sigma)$ satisfies* (00), *and $\varphi(\Sigma)$, $-\psi(\Sigma)$ are its positive and negative parts, then $\bar{S}_\Sigma(\varphi)$, $\bar{S}_\Sigma(\psi)$ as well as $\bar{S}_\Sigma(|f|)$ are unchanged by subdivision and bounded in every $\dot{\Delta}$.*

As $\bar{S}_\Sigma(\varphi)$, $\bar{S}_\Sigma(\psi)$, $\bar{S}_\Sigma(|f|)$ are non-negative, we only need verify that they are finite, to complete the proof of this statement; since the fact that they are unc hanged by subdivision is already proved by Theorem IX′, because $\varphi(\Sigma)$ and $\psi(\Sigma)$ are the positive parts of $f(\Sigma)$ and $-f(\Sigma)$ respectively, both of which satisfy (00) and a fortiori (00)′, which is therefore also satisfied by $\varphi(\Sigma)$, $\psi(\Sigma)$ and their sum $|f|(\Sigma)$.

But this is seen exactly as in Theorem X.

Definitions of continuity and monotony.

A. 1) $\qquad \dot{\Delta}' \rightarrowtail \dot{\Delta}_0$

or $\dot{\Delta}'$ *approaches* $\dot{\Delta}_0$ *on the outside*, means $\lim \dot{\Delta}' = \dot{\Delta}_0$.

$$\dot{\Delta}' \hookrightarrow \dot{\Delta}_0$$

or $\dot{\Delta}'$ *approaches* $\dot{\Delta}_0$ *on the inside*, means $\lim \{\text{interior } \dot{\Delta}'\} = \text{interior of } \dot{\Delta}_0$.

The adverb *strictly* (str.) is added, when $\dot{\Delta}'$ and interior of $\dot{\Delta}'$ both have the same limit.

$$\dot{\Delta}' \rightarrow \dot{\Delta}_0$$

or $\dot{\Delta}'$ *approaches* $\dot{\Delta}_0$, means $\begin{cases} \lim (\dot{\Delta}' + \dot{\Delta}_0) = \dot{\Delta}_0 \\ \lim (\text{interior } \dot{\Delta}'\, \dot{\Delta}_0) = \text{interior } \dot{\Delta}_0 \end{cases}$

simultaneously. It contains both $\rightarrowtail \dot{\Delta}_0$ and $\hookrightarrow \dot{\Delta}_0$ as particular cases.

2) *$f(\dot{\Delta})$ is continuous on the outside at $\dot{\Delta}_0$*
if $\lim f(\dot{\Delta}') = f(\dot{\Delta}_0)$ when $\dot{\Delta}' \rightarrowtail \dot{\Delta}_0$.

$f(\dot{\Delta})$ is continuous on the inside at $\dot{\Delta}_0$
if $\lim f(\dot{\Delta}') = f(\dot{\Delta}_0)$ when $\dot{\Delta}' \hookrightarrow \dot{\Delta}_0$.

$f(\dot{\Delta})$ is continuous on either side at $\dot{\Delta}_0$
if it is continuous both on the outside and on the inside at $\dot{\Delta}_0$.

$f(\dot{\Delta})$ is entirely continuous at $\dot{\Delta}_0$
if $\lim f(\dot{\Delta}') = f(\dot{\Delta}_0)$ when $\dot{\Delta}' \rightarrow \dot{\Delta}_0$.

It is then, in particular, continuous on either side at $\dot{\Delta}_0$.

Note. The adverb *strictly* is added in the terminology if it may be added in the defining description.

3) We have similar definitions of *upper and lower semi-continuity* at $\dot{\Delta}_0$, replacing the equality of all limits to $f(\dot{\Delta}_0)$ by an inequality of given sense between all limits and $f(\dot{\Delta}_0)$.

4) The words "at $\dot{\Delta}_0$" are omitted when it is intended to imply that the property in question holds at every $\dot{\Delta}_0$ in the considered region.

5) We shall say that $f(\Sigma)$ is entirely continuous if $f(\Delta)$ is entirely continuous.

6) The limits of approach of $f(\Delta)$ at Δ_0, either absolutely, or on the inside or outside, either strictly or not, are the limits of $f(\Delta')$ when $\Delta' \to \Delta_0$, or $\Delta' \rightarrowtail \Delta_0$ or $\Delta' \hookrightarrow \Delta_0$, either strictly or not.

B. $f(\Delta)$ is said to be *monotone* if $\dot{\Delta}'$ contained in $\dot{\Delta}$ implies $f(\Delta') \leqq f(\Delta)$.

Note. If $f(\Sigma)$ is non-negative and decreases by subdivision, we have, if $\dot{\Sigma}'$ is contained in $\dot{\Delta}$, $f(\Sigma') \leqq f(\Delta)$. For Σ' can then be regarded as part of a subdivision Σ of Δ, which gives, necessarily, a value $f(\Sigma) \geqq f(\Sigma')$, but $\leqq f(\Delta)$. In particular, therefore if $f(\Sigma)$ is non-negative and decreases by subdivision, then $f(\Delta)$ is monotone.

In strict analogy with monotone functions of point, we have the

Theorem. *A monotone function $f(\Delta)$ has unique limits of approach strictly on the outside and inside at every Δ_0. They are respectively the largest and least (upper and lower) limits of $f(\Delta')$ for $\Delta' \to \Delta_0$ in any manner. And $f(\Delta_0)$ lies between the lower limit on the outside and the upper limit on the inside (in the wide sense) at Δ_0.*

Let $\Delta' \rightarrowtail \Delta_0$ strictly, so that $\dot{\Delta}_0$ is interior to each $\dot{\Delta}'$. If $\Delta'' \to \Delta_0$, from a definite stage $\dot{\Delta}''$ remains interior to any fixed one of the $\dot{\Delta}'$. Hence all $\lim f(\Delta'')$ as $\Delta'' \to \Delta_0$ are $\leqq$ each $f(\Delta')$, hence $\leqq$ any $\lim f(\Delta')$. If however Δ'' also $\rightarrowtail \Delta_0$ strictly, reversing the roles of Δ'' and Δ' we get all $\lim f(\Delta') \leqq$ any $\lim f(\Delta'')$. Whence the unicity, expressed in the first sentence, for the limit strictly on the outside; and simultaneously, the equation of this limit, expressed in the second sentence, to the upper limit at Δ_0. Also as, for Δ' containing Δ_0 (in the wide sense), $f(\Delta') \geqq f(\Delta_0)$, clearly all $\lim f(\Delta')$ on the outside are $\geqq f(\Delta_0)$. A similar reasoning for the inside completes the proof of all three statements.

The following short discussion of monotone functions of Δ shows still more analogy with monotone functions of point.

Let $$\Phi(\Delta) = \overline{\lim_{\Delta' \to \Delta}} f(\Delta'), \qquad \Psi(\Delta) = \underline{\lim_{\Delta' \to \Delta}} f(\Delta'),$$

be the *upper and lower functions* of $f(\Delta)$.

If $\Delta'' \rightarrowtail \Delta_1$ strictly and $\Delta' \rightarrowtail \Delta_0$ strictly, and if $\dot{\Delta}_0$ is contained in $\dot{\Delta}_1$, then from a definite stage, Δ' remains interior to any fixed one of the $\dot{\Delta}''$, and hence $f(\Delta'') \geqq \Phi(\Delta_0)$ for each Δ'', and in the limit, $\Phi(\Delta_1) \geqq \Phi(\Delta_0)$; or $\Phi(\Delta)$ *is monotone.* Similarly $\Psi(\Delta)$ *is monotone.* They have therefore unique limits of approach on either side at every Δ_0.

Now our theorem for $f(\Delta)$ expresses the fact that

$$\Phi(\Delta) = \lim_{\Delta' \to \Delta \text{ str.}} f(\Delta'), \qquad \Psi(\Delta) = \lim_{\Delta' (\to \Delta \text{ str.}} f(\Delta').$$

By the diagonal method, it follows that

$$\Phi(\Delta) = \lim_{\Delta' \to \Delta \text{ str.}} \Phi(\Delta') = \overline{\lim}\, \Phi(\Delta'), \quad \Psi(\Delta) = \lim_{\Delta' (\to \Delta \text{ str.}} \Psi(\Delta') = \underline{\lim}\, \Psi(\Delta')$$

when $\Delta' \to \Delta_0$ in any manner.

By the last clause of our theorem, $\Phi(\Delta)$ *is therefore continuous on the outside,* $\Psi(\Delta)$ *continuous on the inside.*

Further, *if* Δ_0 *is interior to* Δ_1, *then* $\Phi(\Delta_0) \leqq \Psi(\Delta_1)$; for any sufficiently advanced Δ' of a succession $\to \Delta_0$ str. will be interior to Δ_1, and hence also to all Δ'', after a certain stage, of any succession $(\to \Delta_1$. Whence it follows, as $\Psi(\Delta_0) \leqq \Phi(\Delta_0)$, by making Δ_0 and Δ_1 both $(\to \bar{\Delta}_0$ str., that in virtue of the continuity of $\Psi(\Delta)$ on the inside at $\bar{\Delta}_0$, $\Phi(\Delta_0)$ has the same limit as $\Psi(\Delta_0)$ strictly on the inside at $\bar{\Delta}_0$. Or

$$\Psi(\Delta) = \lim_{\Delta' (\to \Delta \text{ str.}} \Phi(\Delta') = \lim_{\Delta' \to 0} \Phi(\Delta'),$$

$$\Phi(\Delta) = \lim_{\Delta' \to \Delta \text{ str.}} \Psi(\Delta') = \overline{\lim_{\Delta' \to \Delta}}\, \Psi(\Delta').$$

We summarise the results as follows:

Theorem. *A monotone function* $f(\Delta)$ *lies between its upper and lower functions; these are monotone, and possess the same upper and lower functions as* $f(\Delta)$; *thus in particular, the former is continuous on the outside, the latter on the inside (in the widest sense).*

Let $\Xi(\Delta) = \Phi(\Delta) - \Psi(\Delta)$. This is the "saltus function" of $f(\Delta)$, and is non-negative. As $\Phi(\Delta)$ is continuous on the inside and $\Psi(\Delta')$ has for limit, strictly on the inside, $\Phi(\Delta)$, $\Xi(\Delta')$ has for limit, strictly on the inside, zero. Similarly its limit strictly on the outside is zero. The other limits of $\Xi(\Delta')$ are all $\leqq \Phi(\Delta) - \Psi(\Delta)$, because those of $\Phi(\Delta')$ and $\Psi(\Delta')$ are between $\Phi(\Delta)$ and $\Psi(\Delta)$.

The saltus function $\Xi(\Delta)$ *of a monotone function of* Δ *is entirely upper semi-continuous. It has unique limits of approach on either side strictly, both equal to zero. The other limits lie between* 0 *and* $\Xi(\Delta)$.

We can also remark that.

A monotone function of Δ is lower semi-continuous on the outside and upper semi-continuous on the inside.

VII. Functions unchanged by subdivision and the interpretation of the conditions VI.

A function increasing by subdivision, which satisfies (00), *is bounded above in every* Δ.

This is an immediate consequence of the corollaries of Theorem IX to XI, since the upper bound of such a function $f(\Sigma)$ in $\dot{\Delta}$ is identical with that of $\bar{S}_\Sigma(f)$ in $\dot{\Delta}$. Similarly

A function decreasing by subdivision, which satisfies 00, *is bounded below.*

Functions unchanged by subdivison, which satisfy (00), are therefore bounded and the converse in this case clearly also holds. Thus

A function unchanged by subdivision is bounded if and only if it satisfies (00) (in the stricter form 01).

If $f(\Sigma)$ decreases by subdivision, is non-negative, finite (hence bounded) and entirely continuous, then $f(\Sigma)$ satisfies (10).

$f(\Delta)$ is, as already remarked, (p. 31), monotone, and we have, more precisely, $f(\Sigma) \leqq f(\Delta)$ if $\dot{\Sigma}$ is contained in $\dot{\Delta}$.

Let $\dot{\Sigma}'$ describe a succession with unique limit contained in one $\dot{F}$, a face of $\dot{\Delta}_0$, say. Taking any succession of $\Delta' \rightarrowtail \Delta_0$ str. and any succession of $\Delta'' \rightarrowtail \Delta_0$ str. $\dot{\Sigma}'$ is ultimately contained in $\dot{\Delta}' - \dot{\Delta}''$ for any pair of the Δ' and Δ''; and so for that pair, for all but a finite number of the Σ',

$$f(\Delta'') + f(\Sigma') \leqq f(\Delta')$$

or

$$\lim f(\Sigma') \leqq f(\Delta') - f(\Delta'').$$

But $f(\Delta')$ and $f(\Delta'')$ both have limit $f(\Delta)$. Hence $\lim f(\Sigma') = 0$, q. e. d.

When $f(\Sigma)$ is unchanged by subdivision and non-negative, we also have the converse. *I. e. A non-negative finite function unchanged by subdivision is (entirely) continuous if and only if it satisfies condition* (10), for the necessity is involved in the preceding proposition. The sufficiency is proved as follows.

If $\Delta' \rightarrowtail \Delta$ strictly, so that $F(\Delta')$ tends to its lower limit at Δ, then completing Δ' to a subdivision of Δ, and calling the additional part σ', we have

$$F(\Delta) = F(\Delta' + \sigma') = F(\Delta') + F(\sigma').$$

As $\Delta' \rightarrowtail \Delta$; σ' is the sum of parts having for limit the faces of $\dot{\Delta}$. Hence $F(\sigma') \to 0$, by condition 10, assumed to hold, and so

$$\lim_{\Delta' \to \Delta} F(\Delta') = F(\Delta).$$

Similarly we prove that

$$\overline{\lim_{\Delta' \to \Delta}} F(\Delta') = F(\Delta).$$

These two inequalities express the entire continuity of $F(\Delta)$.

This proof is independent of the assumption that $F(\Sigma)$ was non-negative, *i. e.* we have shown that *any* $F(\Sigma)$ *unchanged by subdivision which satisfies condition* (10) *is entirely continuous.* We can shew, further, that *in its canonical expression*

$$F(\Sigma) = \bar{S}_\Sigma(\Phi) - \bar{S}_\Sigma(\Psi)$$

both parts are entirely continuous. For by the elementary propositions of last section, if $F(\Sigma)$ satisfies (10), so do its positive and negative parts, *i. e.* $\Phi(\Sigma)$ and $\Psi(\Sigma)$. Hence by Theorem IX, so do $\bar{S}_\Sigma(\Phi)$ and $\bar{S}_\Sigma(\Phi)$. By our preceding theorem, these are therefore entirely continuous.

We therefore have:

A function unchanged by subdivision is the difference of two non-negative, entirely continuous finite functions unchanged by subdivision, if and only if it satisfies (10).

Lebesgue integrals.

Def. If $F(\Sigma)$ is defined by

$$F(\Delta) = \int_\Delta \varphi(P)\, dP,$$

so that

$$F(\Sigma) = \int_\Sigma \varphi(P)\, dP$$

and is unchanged by subdivision, then we shall say that $F(\Sigma)$ coincides with, or *is, a Lebesgue integral.* It is then known to tend to zero with $m(\dot{\Sigma}) = v_\Sigma$, and therefore $|F|(\Sigma)$ also does; *i. e.* $F(\Sigma)$ *satisfies* (30).

Conversely, if $F(\Sigma)$ is unchanged by subdivision and satisfies condition (31), then in the first place, $D_P(F)$ is unique p. p. and summable by Theorem I of p. 17, since the only condition, $\bar{S}_\Sigma(|F|)$ finite, is certainly satisfied, by the sequel to Theorem XI. Our corollary to Theorem I therefore applies, by which

$$|F(\Sigma) - \int_i D_P(F)\, dP| < \varepsilon'$$

for a certain Σ, interior to Δ, within ε of Δ. We can complete Σ to a subdivision $\Sigma + \sigma$ of Δ, with $v_\sigma < \varepsilon$. Forming, for the given Δ, a succession of Σ with $\varepsilon \to 0$, the corresponding σ has $F(\sigma) \to 0$, by (31). We may arrange that simultaneously $\varepsilon' \to 0$. We have thus

$$\lim F(\Sigma) = \int_\Delta D_P(F)\, dP,$$
$$\lim F(\Sigma) = \lim F(\Sigma + \sigma),$$
$$F(\Sigma + \sigma) = F(\Delta).$$

Thus

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} D_P(F)\, dP$$

and $F(\Sigma)$ is a Lebesgue integral.

The necessary and sufficient condition for $F(\Sigma)$, unchanged by subdivision to satisfy (31) *is that it be a Lebesgue integral* of its $D_P(F)$, coincident p. p.).

The two parts of its canonical expressions are then themselves Lebesgue integrals.

Since when $F(\Sigma)$ satisfies (30), so do its positive and negative parts, and hence their S_Σ's, which are consequently Lebesgue integrals; while their difference furnishes the canonical expression of $F(\Sigma)$.

Perfectly continuous increments.

If $F(\Sigma)$ is defined by

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} dg(P)$$

where $g(P)$ is continuous of bounded variation[16], so that

$$F(\Sigma) = \int_{\dot\Sigma} dg(P)$$

and is unchanged by subdivision, then we shall say that $F(\Sigma)$ coincides with or is the increment of $g(P)$ over $\dot\Sigma$. It then tends to 0 with $w(\dot\Sigma)$[17] and therefore $|F|(\Sigma)$ also does; i. e. $F(\Sigma)$ satisfies condition (21).

Given a non-negative $F(\Sigma)$ unchanged by subdivision and satisfying (21) we define a function of position by writing

$$g(P) = (-1)^\lambda \lim F(\Sigma) \quad \text{when} \quad \lim \dot\Sigma = (O, P)$$

where (O, P) is a rectangular interval of diagonal OP, O being fixed, $-$ and λ the number of negative coordinates of P, $-$ and

$$g(P) = 0 \quad \text{in the coordinate planes through } O.$$

The unicity of the preceding limit follows from the fulfilment of condition (21), which also involves the continuity of $g(P)$. If $P_1 P_2$ be any rectangular interval of principal diagonal $P_1 P_2$, the total increment of $g(P)$ over it is

$$\lim F(\Sigma) \quad \text{for} \quad \lim \dot\Sigma = (P_1, P_2).$$

[16] or of bounded increment. A continuous function of bounded increment differs from a continuous function of bounded variation by a sum of continuous functions of $(n-1)$ of the coordinates only, which does not affect the value of the n^{ple} or total increment, but only the increments of lower orders.

[17] Cf. R. C. Young, Les fonctions additives d'ensemble etc., Enseign. math. 1927, N^{os} 1—2—3, p. 64, noting that the coordinate planes are arbitrary. The method of subsequences then gives the stated property.

A sum of such intervals we shall call for brevity a rectangular set. Given any $\dot{\Delta}$, clearly $F(\Delta)$ lies between the increment of $g(P)$ over rectangular sets containing $\dot{\Delta}$ and that over rectangular sets contained in $\dot{\Delta}$. But these two classes of increment uniquely define the increment of $g(P)$ over $\dot{\Delta}$, as the only number separating them. Hence $F(\Delta)$ is equal to this increment, or

$$F(\Delta) = \int_{\dot{\Delta}} dg(P).$$

Thus $F(\Sigma)$ is the increment of a continuous monotone function $g(P)$. Any $F(\Sigma)$ unchanged by subdivision and satisfying (21) is the difference of two non-negative such functions; thus by the above: Any function $F(\Sigma)$ unchanged by subdivision and satisfying (21) is the increment of a continuous function of bounded variation, or as we shall say for brevity a *perfectly continuous increment.*

The necessary and sufficient condition for $F(\Sigma)$, (*unchanged by subdivision*), *to satisfy* (21) *is that it be a perfectly continuous increment.*

Bounded increments.

Given any function $g(P)$ of bounded variation, its n^{ple} *increment*[18]) provides a function $F(\Sigma)$ unchanged by subdivision and bounded, in the perfect field whose units Δ represent *all rectangular intervals.* We shall say that this $F(\Sigma)$ coincides with or is a *bounded increment* and the adjective n^{ple} will be implied.

Given in that field any function $F(\Sigma)$ unchanged by subdivision and bounded, we can define a function of bounded variation $g(P)$ having $F(\Delta)$ for n^{ple} increment, by writing

$$g(P) = (-1)^{\lambda} F(\Delta_{O,P}) \quad \text{where} \quad \dot{\Delta}_{O,P} = (O, P)$$

and O is fixed, while λ is the number of negative coordinates of P, but

$$g(P) = 0 \quad \text{in the coordinate planes through } O.$$

O has to be chosen not to belong to a certain countable set of planes, but is otherwise arbitrary.

In that field, there is accordingly complete equivalence between the terms "bounded increment" and "function $F(\Sigma)$ unchanged by subdivision and bounded".

If $F(\Sigma)$ is defined in a more general field, we first show that it defines uniquely a function of $\dot{E}$, completely additive in the classical sense, which coincides with $\lim F(\Sigma)$ for $\dot{\Sigma}$ decreasing to $\dot{E}$, when $\dot{E}$ is any

[18]) L. C. Young, The Theory of Integration pp. 18, 19. Cf. also reference in preceding footnote, pp. 65–67.

simple closed set. We then utilise this function of $\dot{E}$ to define a function of bounded variation $g(P)$ of which it is the *total increment*[19]). Since this total increment is defined from $F(\Sigma)$ by exactly the same process as from the n^{ple} increment of $g(P)$, — and we may choose $g(P)$ so that if perchance $\dot{\Sigma}$ can be a rectangular interval, the n^{ple} increment of that interval is precisely $f(\Sigma)$ — we may consistently say that $F(\Sigma)$ represents or is the n^{ple} increment of $g(P)$ for the simple polygonal sets $\dot{\Sigma}$. Therefore, *in any field, if $F(\Sigma)$ is unchanged by subdivision and bounded, it will be said to be a bounded increment, the adjective n^{ple} beeing implied.*

$F(\Sigma)$ differs from the Lebesgue integral of its D_P (coincident p. p. and summable) by a function unchanged by subdivision and bounded, whose D_P are all zero p. p. We can show, independantly from the known properties of functions of bounded variation, that it is, in the above sense, the bounded n^{ple} increment of a singular function $\gamma(P)$, or one whose total increment is zero outside a certain (not uniquely defined) set of measure zero. — For this we use the proposition, following on Theorem 1, already used a few pages back under the heading of "Lebesgue integrals", and the method of monotone sequences of sets of points. — The difference may accordingly be called the *singular part of $F(\Sigma)$* and the integral of $D_P(F)$ will be called the *integral part of $F(\Sigma)$*.

Continuous increments.

A bounded increment $F(\Sigma)$ which is entirely continuous will be called for brevity a *continuous increment.* The two parts in its canonical expression are then also continuous increments. *The necessary and sufficient condition is that it should satisfy* (11).

It is not then necessarily the increment of a continuous function of bounded variation, i. e. a perfectly continuous increment. We can only assert that the additive function of sets of points generated by $F(\Sigma)$ as above explained vanishes, since $F(\Sigma)$ satisfies (11), for every set of frontier points of the Δ of our field, and is therefore equal to $F(\Sigma)$ for $\dot{\Sigma}$. Thus $F(\Sigma)$ is still the increment of $g(P)$ over $\dot{\Sigma}$,

$$F(\Sigma) = \int_{\dot{\Sigma}} dg(P)$$

but this no longer necessarily tends to one and the same limit when $\lim \dot{\Sigma} = [O, P]$ open, closed or partly open; *$F(\Sigma)$ is indeed the total increment of $g(P)$ in a field in which this increment is continuous.* Any bounded increment $F(\Sigma)$ may be rendered continuous by restricting the field in which it is defined, taking as units only those Δ which fulfil the condition that the function of sets generated by $F(\Sigma)$ vanish identically over the frontier of $\dot{\Delta}$.

---

[19]) cf. reference in preceding footnote.

VIII. Results of the specialisation.

*Theorem XII. *A necessary and sufficient condition for* $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *to be Lebesgue integrals, is that* $f(\Sigma)$ *satisfies condition* (30).

The sufficiency is expressed in Theorems IX, X, XI; if $f(\Sigma)$ satisfies (30), $\bar{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ are unchanged by subdivision and finite, and satisfy (30), therefore (31); i. e. are Lebesgue integrals.

The necessity is a consequence of the converse of Theorem XI; for if $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are Lebesgue integrals, they satisfy (30), are unchanged by subdivision and finite; so $f(\Sigma)$ also satisfies (30).

*Theorem XIII. *If* $f(\Sigma)$ *satisfies* (30) *then*

$$\bar{S}_\Sigma(f) = \int_{\Sigma} \bar{D}_P(f)\, dP,$$

$$\underline{S}_\Sigma(f) = \int_{\Sigma} \underline{D}_P(f)\, dP.$$

We have already seen that $\bar{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ are Lebesgue integrals; each is therefore equal to the integral of its $\bar{D}_P$ or $\underline{D}_P$, coincident p. p.; Theorem III gives the equality of $\bar{D}_P(\bar{S}_\Sigma(f))$ to $\bar{D}_P(f)$, and of $\bar{D}_P(\underline{S}_\Sigma(f))$ to $\underline{D}_P(f)$. Whence the result.

Theorem XIV[a]. *A necessary and sufficient condition for* $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *to be perfectly continuous increments is that* $f(\Sigma)$ *satisfies* (20). This is proved like the next theorem, substituting (20) and (21) to (10) and (11) and perfectly continuous to continuous.

Theorem XIV[b]. *A necessary and sufficient condition for* $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *to be continuous increments, is that* $f(\Sigma)$ *satisfies* (10).

The condition is sufficient, because by IX and XI it involves that $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are unchanged by subdivision and satisfy (10), hence (11), i. e. are continuous increments.

The condition is necessary, because if $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are continuous increments, i. e. are unchanged by subdivision and satisfy (11), and a fortiori (10), (and also, in particular, are bounded), then, as we stated in the sequel to Theorem XI, $f(\Sigma)$ also satisfies (10).

Theorem XV. *For* $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *to be bounded increments, it suffices that* $f(\Sigma)$ *satisfy* (00).

We proved in Section VI (cf. footnote [15]) p. 28) that then $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are unchanged by subdivision and bounded, i. e. are bounded increments.

Note. When they coincide we have the more precise:

If $S_\Sigma(f)$ *is unique, it is bounded* (*and therefore a bounded increment*) *if and only if* $f(\Sigma)$ *satisfies* (00).

Theorem XVI. *In any of these cases, the integral parts of* $\overline{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *are respectively*

$$\int_{\dot{S}} \overline{D}_P(f)\,dP, \quad \int_{\dot{S}} \underline{D}_P(f)\,dP.$$

This, like Theorem XIII, is deduced from Theorem III. For the finiteness of $\overline{S}_\Sigma(|f|)$ in the case of condition (00), see p. 30, small print.

As a particular case of Theorem XIV we may state

A necessary and sufficient condition for $\overline{S}_\Sigma(f)$ *and* $\underline{S}_\Sigma(f)$ *to coincide and be Lebesgue integrals is that* $f(\Sigma)$ *satisfies* (30) *and has coincident* $D_P(f)$ p. p.

When $f(\Sigma)$ increases or decreases by subdivision, Theorem VIII states that if $\overline{S}_\Sigma(f)$ and $\underline{S}_\Sigma(f)$ are bounded increments, they coincide. Our previous theorems therefore translate to the following, valid equally if $f(\Sigma)$ be replaced by *any sum of functions which increase or decrease by subdivision.*

Theorem XVII. *If* $f(\Sigma)$ *increases or decreases by subdivision, a necessary and sufficient condition for it to have unique* $S_\Sigma(f)$ *equal to a bounded increment is that it satisfies* (00).

Theorem XVIII. *Its* D_P *are then summable and possess the same Lebesgue integral, which is the integral part of* $S_\Sigma(f)$.

Theorem XIX. *If* $f(\Sigma)$ *increases or decreases by subdivision, a necessary and sufficient condition for it to possess unique* $S_\Sigma(f)$ *which be a continuous increment, is that it satisfies* (10); *in this statement, continuous may be replaced by perfectly continuous if at the same time* (10) *be replaced by* (20).

Theorem XX. *If* $f(\Sigma)$ *increases or decreases by subdivision, a necessary and sufficient condition for it to possess a unique* $S_\Sigma(f)$ *which be a Lebesgue integral is that it satisfies* (30).

Theorem XXI. *We then have*

$$S_\Sigma(f) = \int_{\dot{S}} D_P(f)\,dP.$$

Positive and negative parts of $f(\Sigma)$ and the canonical expression of $\overline{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$.

If $f(\Sigma)$ *be any function,* $\varphi(\Sigma)$, $-\psi(\Sigma)$ *its positive and negative parts, then positive part of* $\overline{S}_\Sigma(f) \leqq \overline{S}_\Sigma(\varphi)$; *positive part of* $\underline{S}_\Sigma(f) \leqq \underline{S}_\Sigma(\varphi)$; *— negative part of* $\overline{S}_\Sigma(f) \leqq \underline{S}_\Sigma(\psi)$; *– negative part of* $\underline{S}_\Sigma(f) \leqq \overline{S}_\Sigma(\psi)$.

For when $\overline{S}_\Delta(f)$ is positive, it is equal to its positive part, which is then, therefore, $\leqq \overline{S}_\Delta(\varphi)$, as $f(\Sigma) \leqq \varphi(\Sigma)$; when $S_\Delta(f) \leqq 0$, its posi-

tive part is zero, while $\bar{S}_{\Delta}(\varphi) \geqq 0$. — Similarly we prove the second inequality. — The negative part of $\bar{S}_{\Sigma}(f)$ is the positive part of $-\bar{S}_{\Sigma}(f) = \underline{S}_{\Sigma}(-f)$, with its sign changed; and the positive part of $-f(\Sigma)$ is $\psi(\Sigma)$; hence the third inequality results from the second; similarly the fourth from the first.

If $\bar{S}_{\Sigma}(f)$ is a bounded increment, and

$$\bar{F}_1(\Sigma) - \bar{F}_2(\Sigma)$$

its canonical expression as the difference of two non-negative increments, then

$$\bar{F}_1(\Sigma) = \bar{S}_{\Sigma}(\varphi); \qquad \bar{F}_2(\Sigma) = \bar{S}_{\Sigma}(\underline{S}(\psi)) \leqq \bar{S}_{\Sigma}(\psi).$$

If $\underline{S}_{\Sigma}(f)$ is a bounded increment and

$$\underline{F}_1(\Sigma) - \underline{F}_2(\Sigma)$$

its canonical expression, then

$$\underline{F}_1(\Sigma) = \bar{S}_{\Sigma}(\underline{S}(\varphi)) \leqq \bar{S}_{\Sigma}(\varphi); \qquad \underline{F}_2(\Sigma) = \bar{S}_{\Sigma}(\psi).$$

The second part follows from the first by putting $-f$ for f; for this changes $\bar{F}_1$ to $\underline{F}_2$, $\bar{F}_2$ to $\underline{F}_1$, and interchanges φ and ψ.

For the proof of the first, we use the fundamental property of functions whose $\bar{S}_{\Sigma}$ are unchanged by subdivision and bounded, i. e. bounded increments. Let Σ describe any sequence of subdivisions and let Σ' be the part of Σ for which $f(\Sigma') = \varphi(\Sigma)$. For all but a finite number of these Σ we have then

$$\varphi(\Sigma) \leqq \bar{S}_{\Sigma'}(f) \leqq \bar{F}_1(\Sigma') \leqq \bar{F}_1(\Sigma) = \bar{F}_1(\Delta).$$

Hence, making $\varphi(\Sigma)$ tend to its $\bar{S}_{\Delta}$,

$$\bar{S}_{\Delta}(\varphi) \leqq \bar{F}_1(\Delta).$$

Now $\bar{F}_1(\Sigma)$ is defined as the $\bar{S}_{\Sigma}$ of the positive part of $\bar{S}_{\Sigma}(f)$. Taking $\bar{S}$'s in the first of the inequalities of our preceding proposition, and noting that $\bar{S}_{\Sigma}(\varphi)$ decreases by subdivision, we have

$$\bar{F}_1(\Delta) \leqq \bar{S}_{\Delta}(\varphi).$$

Hence, as desired,

$$\bar{F}_1(\Delta) = \bar{S}_{\Delta}(\varphi).$$

Now $\bar{F}_1(\Sigma) - \bar{F}_2(\Sigma) = \bar{S}_{\Sigma}(f) = \bar{S}_{\Sigma}(\varphi - \psi)$ lies between $\bar{S}_{\Sigma}(\varphi) - \underline{S}_{\Sigma}(\psi)$ and $\bar{S}_{\Sigma}(\varphi) \quad \bar{S}_{\Sigma}(\psi)$. Since $\bar{F}_1(\Sigma) = \bar{S}_{\Sigma}(\varphi)$, it follows that $\bar{F}_2(\Sigma)$ is between $\underline{S}_{\Sigma}(\psi)$ and $\bar{S}_{\Sigma}(\psi)$, or, because $F_2(\Sigma)$ is unchanged by subdivision, between $S_{\Sigma}(\underline{S}(\psi))$ and $S_{\Sigma}(\psi)$. But taking $\bar{S}$'s in the third inequality of our preceding proposition, we get, since $\bar{F}_2(\Sigma)$ is defined as the $\bar{S}_{\Sigma}$ of $\{-$ negative part of $\bar{S}_{\Sigma}(f)\}$,

$$F_2(\Sigma) \leqq \bar{S}_{\Sigma}(\underline{S}(\psi)).$$

Whence, as desired,

$$\bar{S}_\Sigma(\underline{S}(\psi)) = \bar{F}_2(\Sigma) \leqq \bar{S}_\Sigma(\psi).$$

This completes our proof.

Corollary. *If* $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ *are continuous increments, then*

$$F_1(\Sigma) = \bar{S}_\Sigma(\varphi); \quad \underline{F}_1(\Sigma) = \underline{S}_\Sigma(\varphi); \quad \bar{F}_2(\Sigma) = \underline{S}_\Sigma(\psi); \quad \bar{F}_2(\Sigma) = \bar{S}_\Sigma(\psi).$$

For if $\bar{S}_\Sigma(f)$, $\underline{S}_\Sigma(f)$ are continuous increments, $\varphi(\Sigma)$ and $\psi(\Sigma)$ satisfy (10), because $f(\Sigma)$ does; and therefore their S_Σ and $\underline{S}_\Sigma$ are continuous increments. In particular,

$$\bar{S}_\Sigma(\underline{S}(\psi)) = \underline{S}(\psi); \qquad \bar{S}_\Sigma(\underline{S}(\varphi)) = \underline{S}_\Sigma(\varphi)$$

and so our preceding proposition gives the above.

Hence we deduce in particular:

Theorem. *If* $f(\Sigma)$ *possess unique* $S_\Sigma(f)$ *which is a continuous increment, then so do its positive and negative parts.*

For if $F_1(\Sigma) - F_2(\Sigma)$ is the canonical expression of $S_\Sigma(f)$, our preceding corollary gives

$$F_1(\Sigma) = \bar{S}_\Sigma(\varphi) = \underline{S}_\Sigma(\varphi); \qquad F_2(\Sigma) = \underline{S}_\Sigma(\psi) = \bar{S}_\Sigma(\psi).$$

Thus in fact

$$S_\Sigma(\varphi) - S_\Sigma(\psi) \text{ } \textit{is the canonical expression of} \text{ } S_\Sigma(f).$$

IX. Immediate applications.

A. Distance functions.

A simple type of function increasing by subdivision is one expressible in the form

$$\Phi(\Delta) = \sqrt{(\Phi_1(\Delta))^2 + (\Phi_2(\Delta))^2 + \ldots + (\Phi_k(\Delta))^2}$$

in terms of k functions $\Phi_i(\Sigma)$ which are *unchanged* by subdivision. (*Distance function with components* $\Phi_i(\Sigma)$).

That it increases by subdivision at once appears from the inequality

$$\Phi(\Sigma) \geqq \sqrt{(\Phi_1(\Sigma))^2 + (\Phi_2(\Sigma))^2 + \ldots + (\Phi_k(\Sigma))^2}$$

true without reference to the special property of $\Phi_i(\Sigma)$.

More precisely, if $\varphi(\Sigma)$ is any (non-negative) function expressible in terms of k others by the formula

$$\varphi(\Delta) = \sqrt{(\varphi_1(\Delta))^2 + (\varphi_2(\Delta))^2 + \ldots + (\varphi_k(\Delta))^2}$$

denoting as usual by $|\varphi_i|(\Sigma)$ the function equal to $|\varphi_i(\Delta)|$ when Σ is a single Δ, we have for every Σ

$$|\varphi_1|(\Sigma)+|\varphi_2|(\Sigma)+\ldots+|\varphi_k|(\Sigma)$$
$$\geqq \varphi(\Sigma) \geqq \sqrt{(|\varphi_1|(\Sigma))^2+(|\varphi_2|(\Sigma))^2+\ldots+(|\varphi_k|(\Sigma))^2}.$$

The first of these inequalities follows by addition from the obvious one when Σ is a single Δ. The second is a result of the well-known inequality:

$$\operatorname*{sum}_{i=1\,\mathrm{to}\,q}\left\{\operatorname*{sum}_{j=1\,\mathrm{to}\,k}(a_{ij})^2\right\}^{1/2} \geqq \left\{\operatorname*{sum}_{j=1\,\mathrm{to}\,k}\left(\operatorname*{sum}_{i=1\,\mathrm{to}\,q} a_{ij}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Hence also we infer: *If one of the conditions* VI, *other than* (00) *and* (01), *is satisfied by each* $\varphi_i(\Sigma)$, *it is satisfied by* $\varphi(\Sigma)$; *and conversely if* $\varphi(\Sigma)$ *satisfies one of those conditions, then so does each* $\varphi_i(\Sigma)$.

We can also state: *If* $\overline{D}_P$ *and* $\underline{D}_P$ *of each* $\varphi_i(\Sigma)$ *and* $\varphi(\Sigma)$ *are known to coincide at* P, *and their common value be denoted by* D_P, *then at* P

$$D_P(\varphi) = \sqrt{(D_P(\varphi_1))^2+(D_P(\varphi_2))^2+\ldots+(D_P(\varphi_k))^2}.$$

For if $\overline{D}_P$ and $\underline{D}_P$ of any function are known to coincide, they can be obtained as unique limit of $\frac{f(\Delta)}{v_\Delta}$ for $\Delta \to P$, index ϱ.

Applying this to the *distance function* $\Phi(\Sigma)$, we deduce from Theorems XVII, XVIII etc.:

A necessary and sufficient condition for $\Phi(\Sigma)$ *to possess coincident* $S_\Sigma(\Phi)$ *equal to a Lebesgue integral is that each* $\Phi_i(\Sigma)$ *is a Lebesgue integral.*

A necessary and sufficient condition for $\Phi(\Sigma)$ *to possess coincident* $S_\Sigma(\Phi)$ *equal to a continuous increment is that each* $\Phi_i(\Sigma)$*is a continuous increment.* (And similarly with "perfectly continuous" instead of „continuous".)

In the former case $S_\Sigma(\Phi)$ *itself, in the latter its integral part, are equal to*

$$\int_\Sigma \sqrt{(D_P(\Phi_1))^2+(D_P(\Phi_2))^2+\cdots+(D_P(\Phi_k))^2}\,dP.$$

Note. This is the type of function from which the area of a curved surface is defined by Young's method of skew curves. It appears that this area always exists in any ordinary case as a unique limit, and the attempted generalisation of J. C. Burkill in his paper on "The expression of area as an integral" Lond. Math. Soc. Proc. 2, 22 (Part 5) p. 334, reduces to Young's definition without the assumption of "absolute continuity" contained in 5, 2 of that page. — Further details will be elaborated in a later paper, both for this and the type of function next considered, which is the one appearing in the treatment of volume of a curved surface, and leads to the expression of this volume as an ordinary Riemann-Stieltjes integral.

B. Riemann-Stieltjes integrals.

Definition. We shall say $f(\Sigma)$ is *equivalent to zero* if $S_\Sigma(f)$ is unique and equal to 0. $f_1(\Sigma)$ and $f_2(\Sigma)$ are said to be *equivalent* if their difference is equivalent to zero.

Hypothesis. $\xi(P)$ is any *continuous function of* P, $f(\Sigma)$ any function of Σ for which $\overline{S}_\Delta(|f|)$ *is finite.*

Conclusion. *All functions* $\varphi(\Sigma)$ *defined by*

$$\varphi(\Delta) = \xi_\Delta f(\Delta)$$

where ξ_Δ *is any chosen value of* $\xi(P)$ *in* $\dot{\Delta}$, *are equivalent.*

Proof. $f(\Sigma)$ is the difference of two non-negative functions $f_1(\Sigma)$, and $f_2(\Sigma)$ for each of which the $\overline{S}_\Delta$ is finite. $\xi(P)$ is the difference of two non-negative continuous functions $\xi_1(P)$, and $\xi_2(P)$. We have, ξ_Δ, ξ'_Δ denoting any two values of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}$, $\varphi(\Sigma)$, $\varphi'(\Sigma)$ the corresponding functions φ,

$$\varphi(\Delta) - \varphi'(\Delta) = \xi_\Delta f(\Delta) - \xi'_\Delta f(\Delta) = [\xi_\Delta f_1(\Delta) - \xi'_\Delta f_1(\Delta)] + [\xi'_\Delta f_2(\Delta) - \xi_\Delta f_2(\Delta)]$$

showing that it suffices to prove the proposition for non-negative $f(\Sigma)$, for the sum of two functions equivalent to zero is equivalent to zero. And

$$\varphi(\Delta) - \varphi'(\Delta) = \xi_\Delta f(\Delta) - \xi'_\Delta f(\Delta) = [\xi_{1\Delta} f(\Delta) - \xi'_{1\Delta} f(\Delta)] + [\xi'_{2\Delta} f(\Delta) - \xi_{2\Delta} f(\Delta)]$$

showing that it suffices to prove the proposition for non-negative $f(\Sigma)$ and $\xi(P)$.

We proceed therefore to prove the proposition for *non-negative* $f(\Sigma)$ *and* $\xi(P)$.

Let $\bar{\xi}_\Delta$, $\underline{\xi}_\Delta$ denote the upper and lower bounds of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}$; $\overline{\varphi}(\Sigma)$, $\underline{\varphi}(\Sigma)$ the functions defined by

$$\overline{\varphi}(\Delta) = \bar{\xi}_\Delta f(\Delta), \qquad \underline{\varphi}(\Delta) = \underline{\xi}_\Delta f(\Delta),$$

$\overline{\varphi}(\Sigma)$ and $\underline{\varphi}(\Sigma)$ are the largest and least of the functions $\varphi(\Sigma)$. If we can prove their equivalence, that of all the intermediary $\varphi(\Sigma)$ is therefore also ensured.

As $\xi(P)$ is a continuous function of P, we can, for every ε, assign an η, such that in every $\dot{\Delta}$ of span less than η, the bounds of $\xi(P)$ differ by less than ε. For any such $\dot{\Delta}$, therefore,

$$0 \leqq \overline{\varphi}(\Delta) - \underline{\varphi}(\Delta) < \varepsilon f(\Delta).$$

Let Σ consist of such Δ, i. e. have *norm less than* η. Then, by addition,

$$0 \leqq \overline{\varphi}(\Sigma) - \underline{\varphi}(\Sigma) < \varepsilon f(\Sigma).$$

If Σ describes any sequence of subdivisions of Δ_0, the above inequality becomes valid from a definite stage onwards. Let us choose the sequence so that $[\overline{\varphi}(\Sigma) - \underline{\varphi}(\Sigma)]$ tends to its $\overline{S}_{\Delta_0}$. We get

$$0 \leqq \overline{S}_{\Delta_0}(\overline{\varphi} - \underline{\varphi}) \leqq \varepsilon\, \overline{S}_{\Delta_0}(f),$$

As ε is arbitrary, and $\overline{S}_{\Delta_0}(f)$ is finite, this implies

$$S_{\Delta_0}(\overline{\varphi} - \underline{\varphi}) = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

When $f(\Sigma)$ is a bounded increment $F(\Sigma)$ we can then prove the unicity of $S(\varphi)$ and $S(\varphi)$, — hence of all $S(\varphi)$, — in consequence of the following property, valid also if $\xi(P)$ is not continuous, but only bounded.

If the bounded function $\xi(P)$ and the bounded increment $F(\Sigma)$ are non-negative, then $\overline{\Phi}(\Sigma)$, $\underline{\Phi}(\Sigma)$, defined by

$$\overline{\Phi}(\Delta) = \overline{\xi}_{\Delta} F(\Delta), \qquad \underline{\Phi}(\Delta) = \underline{\xi}_{\Delta} F(\Delta).$$

respectively decrease and increase by subdivision.

If Σ_0 is any subdivision of Δ_0,

$$\overline{\Phi}(\Sigma_0) = \sum_{\text{for } \Sigma_0} \{\overline{\xi}_{\Delta} F(\Delta)\} \leqq \overline{\xi}_{\Delta_0} F(\Sigma_0) = \overline{\xi}_{\Delta_0} F(\Delta_0) = \overline{\Phi}(\Delta_0),$$

$$\underline{\Phi}(\Sigma_0) = \sum_{(\text{for } \Sigma_0)} \{\underline{\xi}_{\Delta} F(\Delta)\} \geqq \underline{\xi}_{\Delta_0} F(\Sigma_0) = \underline{\xi}_{\Delta_0} F(\Delta_0) = \underline{\Phi}(\Delta_0)$$

which proves the required properties.

Now by the previous proposition, if $\xi(P)$ is *continuous*, $\overline{\Phi}(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ are equivalent; i. e. in particular,

$$\overline{S}_{\Delta}(\Phi) = \underline{S}_{\Delta}(\Phi),$$

and therefore is unchanged by subdivision, and so, by Theorem VII, coincides with $\underline{S}_{\Delta}(\Phi)$. All other $\Phi(\Sigma)$, since they are equivalent to $\overline{\Phi}(\Sigma)$, therefore also have $\overline{S}_{\Delta}(\Phi) = \underline{S}_{\Delta}(\Phi)$. If $\xi(P)$ and $F(\Sigma)$ are not non-negative, we write

$$\Phi(\Delta) = (\xi_{1\Delta} - \xi_{2\Delta})(F_1(\Delta) - F_2(\Delta)) = \xi_{1\Delta} F_1(\Delta) + \xi_{2\Delta} F_2(\Delta) - \xi_{1\Delta} F_2(\Delta) - \xi_{2\Delta} F_1(\Delta)$$

or

$$\Phi(\Delta) = \Phi_{11}(\Delta) + \Phi_{22}(\Delta) - \Phi_{12}(\Delta) - \Phi_{21}(\Delta),$$

where each $\Phi_{ij}(\Sigma)$ corresponds to non-negative $F(\Sigma)$ and $\xi(P)$, and therefore under the hypothesis of continuity for $\xi(P)$, has coincident S_{Δ}. Thus:

Theorem. *If $\xi(P)$ is continuous and $F(\Sigma)$ any bounded increment, then all functions $\Phi(\Sigma)$ defined by*

$$\Phi(\Delta) = \xi_{\Delta} F(\Delta)$$

where ξ_{Δ} is any chosen value of $\xi(P)$ in Δ, have the same unique $S_{\Sigma}(\Phi)$.

Definition. We write

$$S_{\Delta}(\Phi) = \int_{\Delta} \xi(P)\, dF$$

and call this the *Riemann integral of* $\xi(P)$ *with respect to* $F(\Sigma)$. The above theorem is then stated concisely thus:

A continuous function $\xi(P)$ possesses a Riemann integral with respect to any bounded increment.

Let us again assume $f(\Sigma)$ and $\xi(P)$ non-negative.

Let us suppose it possible to choose, for each Δ, *an* $\mathring{S}_{\Delta}(f)$ *such that*

$$F(\Delta) = \mathring{S}_{\Delta}(f)$$

defines a bounded increment.

To each Δ is thus associated a sequence of subdivisions, or a set of such sequences, for which $f(\Sigma)$ tends to $F(\Delta)$. Taking any such sequence we have, from a definite stage,

$$F(\Delta) - \varepsilon < f(\Sigma) < F(\Delta) + \varepsilon.$$

Also

$$\underline{\xi}_{\Delta} f(\Sigma) \leqq \varphi(\Sigma) \leqq \overline{\xi}_{\Delta} f(\Sigma).$$

Hence, writing ε for $\varepsilon \overline{\xi}_{\Delta}$,

$$\underline{\xi}_{\Delta} F(\Delta) - \varepsilon < \varphi(\Sigma) < \overline{\xi}_{\Delta} F(\Delta) + \varepsilon$$

for all Σ of the sequence, from a definite stage, whatever be ε. It follows that all the limits of $\varphi(\Sigma)$, for the given sequence, are between

$$\underline{\xi}_{\Delta} F(\Delta) = \underline{\Phi}(\Delta) \quad \text{and} \quad \overline{\xi}_{\Delta} F(\Delta) = \overline{\Phi}(\Delta)$$

inclusive. This is true for any sequence of the set associated with Δ. We express this by saying that, under the sole hypothesis that $\xi(P)$ is bounded, and $\xi(P)$ and $F(\Sigma)$ non-negative:

All the $\hat{S}_{\Sigma}(\varphi)$ *which correspond to the chosen* $\mathring{S}_{\Delta}(f)$ *lie between* $\underline{\Phi}(\Delta)$ *and* $\overline{\Phi}(\Delta)$.

Now if, further, $\xi(P)$ is *continuous*, then $\Phi(\Sigma)$ and $\Phi(\Sigma')$, and therefore all the $\hat{S}_{\Sigma}(\varphi)$, have the same unique S_{Δ}, equal to $\int_{\Delta} \xi(P)\, dF$. Also, because a repeated limit is also a double limit, this is equal to one of the $\mathring{S}_{\Delta}(\varphi)$. We have therefore the

Theorem. *If for the non-negative* $f(\Sigma)$ *it is possible to choose an* $\mathring{S}_{\Sigma}(f)$ *equal to a bounded increment* $F(\Sigma)$, *and* $\xi(P)$ *be continuous, then every* $\varphi(\Sigma)$ *defined by*

$$\varphi(\Delta) = \xi_{\Delta} f(\Delta)$$

has one of its $\hat{S}(\varphi)$ *equal to*

$$\int_{\Delta} \xi(P)\, dF.$$

Moreover this intermediary $\mathring{S}_\Delta(\varphi)$ *may be obtained as unique repeated limit of* $\varphi(\Sigma')$, *where* Σ' *describes any sequences of subdivisions of* Σ *for which* $f(\Sigma')$ *tends to* $F(\Sigma)$, *and* Σ *describes any sequence of subdivisions of* Δ.

Here we have dropped the assumption that $\xi(P)$ is non-negative, as the theorem, true for non-negative $\xi(P)$ is therefore true for differences of such $\xi(P)$, hence as it stands.

A particular instance of the previous theorem is the following:

Theorem. *If* $f(\Sigma)$ *be any function with unique continuous, bounded*

$$S_\Sigma(f) = F(\Sigma)$$

and $\xi(P)$ *any continuous function, then every* $\varphi(\Sigma)$ *defined by*

$$\varphi(\Delta) = \xi_\Delta f(\Delta)$$

has unique $S_\Delta(\varphi)$ *equal to*

$$\int_\Delta \xi(P)\, dF.$$

We give the proof first for non-negative $f(\Sigma)$.

If $f(\Sigma)$ has unique $S_\Delta(f)$, this is obtainable by any subdivisions of Δ. It follows therefore, from the last clause of the previous theorem, that

$$\int_\Delta \xi(P)\, dF = \text{any } S_\Delta(\text{any } S_\Sigma(\varphi))$$

and in particular

$$= S_\Delta(\overline{S}_\Sigma(\varphi)) = S_\Delta(\underline{S}_\Sigma(\varphi)).$$

Now the *continuity* and boundedness assumed for $S_\Sigma(f) = F(\Sigma)$ is equivalent to the fulfillment of condition (10) by $f(\Sigma)$, and as $\xi(P)$ is certainly bounded, this implies the fulfillment of condition (10) by $\varphi(\Sigma)$. Therefore $\overline{S}_\Sigma(\varphi)$ and $\underline{S}_\Sigma(\varphi)$ are unchanged by subdivision and so

$$\int_\Delta \xi(P)\, dF = \overline{S}_\Delta(\varphi) = \underline{S}_\Delta(\varphi), \text{ q. e. d.}$$

Now if $f(\Sigma)$ be any function with unique continuous bounded $S_\Sigma(f)$, then it is the difference of two non-negative functions (its positive and negative parts) with the same property (Section VIII p. 40) and therefore the proposition remains true.

(Eingegangen am 25. April 1927.)

On Riemann integration with respect to a continuous increment.

Von

Rosalind Cecily Young in Cambridge.

In a previous communication to the Math. Zeitschrift[1]), I had the opportunity of immediately illustrating the use of the notions there introduced and of some of the results, in the simple considerations relating to "Riemann" integration of continuous functions with respect to continuous increments. This application has an independent interest and may be extended in a similar manner to that in which ordinary Riemann-Stieltjes integration of continuous functions is extended. With this extension the present paper is concerned.

In order to be easily understood, it demands only a knowledge of the following portions of my previous paper: the fundamental definitions developed in the introduction and in sections I (A — C), II (A — B); theorems V and VII on functions which increase or decrease by subdivision in section V; the canonical expression of functions unchanged by subdivision in section V; and the definition of bounded and of continuous increments in section VII. Incidentally, the initial lemma of section IV and the last theorem of section VIII will also be referred to.

In section I of the present paper, I discuss the definition of Riemann integration with respect to a continuous increment, obtaining at the same time the elementary propositions needed in the sequel, and I examine the connection between this definition and the current definitions of Riemann integration with respect to a function of bounded variation. In sections 2—5, integrability of bounded functions with respect to a non-negative increment is considered, and necessary and sufficient conditions

[1]) *Functions of Σ defined by addition or functions of intervals in n-dimensional formulation.*

deduced for this case. In sections 6—8, the restriction that the increment be non-negative is removed, and in section 9 the precise formulation of the criteria of integrability is obtained for the case of an unbounded integrand. The latter discussion reduces Riemann integration of an unbounded function to that of a bounded function equal to it where it lies between certain fixed bounds (depending on the integrator) and zero elsewhere; while the former reduces Riemann integration of a bounded function with respect to any continuous increment to that with respect to non-negative increments. Both these questions I have failed to find explicitely treated in previous literature even in the simple case of ordinary one-dimensional Riemann-Stieltjes integration, the step taken in sections 6—8 having indeed been slurred over by previous writers.

1. (i) Let $F(\Sigma)$ be any continuous increment and $\xi(P)$ any given function of P. Consider the functions $\Phi(\Sigma)$ of Σ, defined by addition from

$$\Phi(\Delta) = \xi_\Delta F(\Delta)$$

where ξ_Δ is any chosen value of $\xi(P)$ in Δ.

$\xi(P)$ will be said to be *integrable Riemann with respect to* $F(\Sigma)$ for Δ_0, if all the functions $\Phi(\Sigma)$ corresponding to every possible choice of ξ_Δ have the *same, unique, finite* S_{Δ_0}; and

$$S_{\Delta_0}(\Phi)$$

will then be called the *Riemann integral of* $\xi(P)$ *with respect to* $F(\Sigma)$ for Δ_0, and written

$$\int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF.$$

For this integral we have immediately the following *elementary propositions*:

(a) Any constant K is integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for every Δ, and

$$\int_{\Delta} K\, dF = K\, F(\Delta).$$

For the $\Phi(\Sigma)$ of K are all $= K\, F(\Sigma)$.

(b) If $\xi_1(P), \xi_2(P), \ldots, \xi_q(P)$ are integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0, then so is

$$\xi(P) = \alpha\, \xi_1(P) + \beta\, \xi_2(P) + \ldots + \varrho\, \xi_q(P),$$

— where $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$ are any constants, — and

$$\int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF = \alpha \int_{\Delta_0} \xi_1(P)\, dF + \beta \int_{\Delta_0} \xi_2(P)\, dF + \ldots + \varrho \int_{\Delta_0} \xi_q(P)\, dF.$$

For each $\Phi(\Sigma)$ of $\xi(P)$ is then this same linear combination of the corresponding $\Phi_i(\Sigma)$ of $\xi_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, q$.

(c) The integral, when existent, of a *non-negative* function $\xi(P)$ with respect to a *non-negative* continuous increment is again non-negative.

And hence, more generally, taking $\xi(P) = \xi_1(P) - \xi_2(P)$ and applying (b):

(d) If $\xi_1(P) \geqq \xi_2(P)$ throughout $\dot{\Delta}_0$, their integrals, when existent, with respect to any given non-negative continuous increment $F(\Sigma)$, for Δ_0, satisfy the corresponding inequality

$$\int_{\Delta_0} \xi_1(P)\, dF \geqq \int_{\Delta_0} \xi_2(P)\, dF.$$

(e) Any function whatsoever is integrable Riemann with respect to the continuous increment

$$F(\Sigma) \equiv 0 \quad \text{in} \quad \dot{\Delta}_0$$

and its integral with repect to this increment is zero, for every Δ in $\dot{\Delta}_0$.

Because each $\Phi(\Sigma)$ is then identically zero.

Further, we have the fundamental property:

(f) *If $\xi(P)$ be integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0, it is integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for every Δ in $\dot{\Delta}_0$.*

In fact if a function of Σ, here $\Phi(\Sigma)$, has a unique S_{Δ_0}, it has also a unique S_Δ for every Δ in $\dot{\Delta}_0$; since S_{Δ_0} may be obtained for instance by any sequence of subdivisions of Δ_0 consecutive to a given subdivision Σ of which Δ is part, $\Sigma = \Sigma' + \Delta$, say; i. e., in particular, S_{Δ_0} may be obtained both as $\bar{S}_\Delta + \bar{S}_{\Sigma'}$ and as $\underline{S}_\Delta + \bar{S}_{\Sigma'}$, whence necessarily

$$\bar{S}_\Delta = \underline{S}_\Delta, \quad \text{q. e. d.}$$

(ii) A function $\xi(P)$ will be said to be *integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for Σ_0*, when it is so for each of the units Δ which constitute Σ_0. The Riemann integral of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$ for Σ_0,

$$\int_{\Sigma_0} \xi(P)\, dF,$$

will be defined as the sum of the integrals of $\xi(P)$ for the various Δ of Σ_0. This is equivalent to defining it as the unique finite S_{Σ_0} of each of the functions $\Phi(\Sigma)$ in (i). Thus, in particular, when $\dot{\Sigma}_0 = \dot{\Delta}_0$, $\int_{\dot{\Sigma}_0} \xi(P)\, dF$ is defined and $= \int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF$.

In other words, *the integral of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$ is a function of Σ unchanged by subdivision and finite, in that portion of the field of Σ in which it exists.*

When $\xi(P)$ is bounded and $F(\Sigma)$ non-negative, the elementary propositions at once yield the following theorem, which will be extended later on:

The integral of a bounded function $\xi(P)$ with respect to a non-negative continuous increment $F(\Sigma)$ is also a continuous increment in that portion of the field of Σ in which it exists.

Suppose $\Delta' \rightarrow \Delta$, i. e. $\dot{\Delta}'$ contains $\dot{\Delta}$ and decreases to $\dot{\Delta}$ as limit. Complete Δ to a subdivision $(\sigma + \Delta)$ of Δ'. We have, supposing $\int_{\Delta'} \xi(P)\, dF$ to exist,

$$\int_{\Delta'} \xi(P)\, dF = \int_{\Delta+\sigma} \xi(P)\, dF = \int_{\Delta} \xi(P)\, dF + \int_{\sigma} \xi(P)\, dF.$$

If $\xi(P)$ is bounded, say $< K$ in absolute value, the latter integral, by proposition (d), lies between $\pm K F(\sigma) = \pm K\{F(\Delta') - F(\Delta)\}$. Hence as $F(\Delta)$ is continuous, $\lim_{\Delta' \rightarrow \Delta} F(\Delta') = F(\Delta)$, $\lim_{\Delta' \rightarrow \Delta} \int_{\Delta'} \xi(P)\, dF = \int_{\Delta} \xi(P)\, dF$. The integral is continuous on the outside at Δ.

Similarly we see that it is continuous on the inside; or indeed entirely continuous.

That the integral is bounded also follows from (d), since it must always lie between $\pm K \times$ upper bound $F(\Sigma)$ in the field.

The integral is thus a function unchanged by subdivision, bounded and continuous is the field in which it exists, i. e. is a continuous increment there.

(iii) Given any additive function of sets of points $g(\dot{E})$, we may deduce from it a continuous increment $F(\Sigma)$ in any perfect field of Σ such that $g(\dot{\Sigma})$ vanishes identically at the frontier of each $\dot{\Delta}$, by writing

$$F(\Delta) = g(\dot{\Delta})$$

for each of its unit elements. Such a field may be deduced from any given perfect field by neglecting all the units which do not satisfy that condition.

In particular, we may choose the field whose units represent the rectangular intervals, with sides parallel to fixed coordinate axes in our n-space; and consider only those intervals at whose frontier points a given function $\gamma(P)$ of bounded variation is continuous, taking for our function of sets $g(\dot{E})$ the "variation" of $\gamma(P)$ over $\dot{E}$.

$$F(\Delta) = g(\dot{\Delta})$$

is now the n^{ple} increment of $\gamma(P)$ for the interval $\dot{\Delta}$, and its total increment (or variation) over the closed, open or partially open interval indiscriminently. The Riemann integral of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0 is then obtained by "subdividing" $\dot{\Delta}_0$ in any manner into *sub-intervals $\dot{\Delta}$ at whose frontier points $\gamma(P)$ is continuous*, ($\dot{\Delta}_0$ being itself also such an interval) and forming the sums as described in (i).

The definition originally given [2]) of *Riemann-Stieltjes integration with respect to a function of bounded variation* $\gamma(P)$, in *one* or *two* dimensions coincides with this definition of Riemann integration *with respect to the* n^{ple} *increment of* $\gamma(P)$ [3]), except insofar as the former definition required the unicity of the limit for modes of "subdivision" into subintervals at whose frontier points $\gamma(P)$ was not necessarily continuous. On the other hand, the subdivisions employed in two dimensions were restricted by the assumption that any two intervals (or meshes) of a subdivision should have a whole side in common, or a single corner, or be entirely distinct. In an indefinite number of dimensions this restriction becomes somewhat difficult to describe.

A second form [4]) of the definition of Riemann-Stieltjes integration with respect to a function of bounded variation $\gamma(P)$ in one or two dimensions differed from the original one by introducing the *total* increments of $\gamma(P)$ over the *interior* of the "meshes" of the subdivision and over successive portions of their frontiers, and multiplying each total increment by a value of the function to be integrated at a point of the corresponding set. This definition as it stands is also somewhat complicated to express precisely in n dimensions. It is properly a definition in terms of sets of points, and as such is capable of a much simpler formulation which will be considered in detail elsewhere.

Both these definitions have been explicitely discussed only in the case of one or two dimensions and for a bounded integrand $\xi(P)$ and *monotone integrator* $\gamma(P)$, — which corresponds to the assumption that $F(\Sigma)$ be non-negative. It has been stated or tacitely assumed that when a bounded function is integrable Riemann with respect to a function of bounded variation, it is integrable Riemann separately with respect to the two monotone parts in the canonical expression of this function.

If we restrict our considerations to the field in which $F(\Sigma)$ is continuous, this fact may be proved quite generally by fairly simple means, as we shall shew (Theorem III); but the method fails if $F(\Sigma)$ is not

---

[2]) W. H. Young, "Integration with respect to a function of bounded variation", Proc. Lond. Math. Soc. (2) **13**, Part 2 (1913), p. 133 and "On Multiple Integration by Parts and the Second Theorem of the Mean", ibid. **16** (1916), p. 280.

[3]) It is clear that this type of nomenclature is far preferable, for logical reasons, since the integrator, like the integral itself, is *essentially* a function of intervals or sets and must be so considered to lead to fruitful generalisations. The usual mode of expression may of course be used *as an abbreviation* if this be properly borne in mind.

[4]) E. W. Hobson, "Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series", Third Ed. **1** (1927), p. 538. — The proof of the equivalence of the two forms is already implicitely contained in the paper by W. H. Young quoted above.

continuous in the field considered. Attempts to prove directly that the restriction of continuity is immaterial also seem to fail on similar grounds. A posteriori, however, since the necessary and sufficient condition which we shall obtain (Theorem II) for the existence of the integral of a bounded function with respect to the increment $F(\Sigma)$ of a monotone function in the field in which this increment is continuous, is precisely the same in form as that for the existence of the integral, in either of the two above senses, with respect to that monotone function, established by W. H. Young, it is clear that the three definitions are equivalent in all essentials; the latter ones only providing a means for defining the integral in a slightly wider field.

The advantages of our form of definition are considerable, as will be perceived in the simplicity, generality and precision of the methods which it enables us to use, and seem to indicate that the restriction to the field of continuity of the increment lies in the nature of things, in the present connection. Already the second part of the proof of Theorem II (section 4) uses the restriction and for Theorems III—VI it seems all but indispensible.

On the other hand, the restriction of taking only rectangular subdivisions of the usual special kind is now entirely irrelevant; any type of simple closed sets for whose frontier the variation of $\gamma(P)$ vanishes identically may be used as meshes of the subdivisions and the relation of neighbouring meshes is of no importance.

We therefore proceed to develop the theory on the basis of our present definition, i. e. assuming $F(\Sigma)$ continuous in the field considered.

2. *Let $F(\Sigma)$ be assumed non-negative and $\xi(P)$ bounded.* Consider, besides the functions $\Phi(\Sigma)$ defined in section 1, (i), the functions $\bar{\Phi}(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ defined by

$$\bar{\Phi}(\Delta) = \bar{\xi}_{\Delta} F(\Delta), \qquad \underline{\Phi}(\Delta) = \underline{\xi}_{\Delta} F(\Delta),$$

where $\bar{\xi}_{\Delta}$, $\underline{\xi}_{\Delta}$ are the upper and lower bounds of $\xi(P)$ in Δ.[5] We have

$$\underline{\Phi}(\Sigma) \geqq \Phi(\Sigma) \geqq \bar{\Phi}(\Sigma), \tag{1}$$

for each of the functions $\Phi(\Sigma)$. On the other hand, $\bar{\Phi}(\Sigma)$, *and similarly* $\underline{\Phi}(\Sigma)$, *is equivalent to some one of the functions* $\Phi(\Sigma)$. In fact, as $\bar{\xi}_{\Delta}$ is by hypothesis finite, we may choose ξ_{Δ} to be $> \bar{\xi}_{\Delta} - \nu_{\Delta}$ where $\nu_{\Delta} = \operatorname{span} \Delta$, and have then, for the corresponding function Φ:

$$\bar{\Phi}(\Sigma) \geqq \Phi(\Sigma) \geqq \bar{\Phi}(\Sigma) - \nu_{\Sigma} F(\Sigma),$$

[5] These are thus the analogues of the upper and lower Darboux sums.

where ν_Σ is the norm of Σ. Whence

$$\lim_{\nu_\Sigma \to 0} (\bar{\Phi}(\Sigma) - \Phi(\Sigma)) = 0 . \tag{2}$$

This proves the equivalence of $\Phi(\Sigma)$ to that function $\Phi(\Sigma)$.

Now $\bar{\Phi}(\Sigma)$ decreases, $\underline{\Phi}(\Sigma)$ increases by subdivision.

In fact, for every subdivision Σ of Δ_0, we have

$$\bar{\Phi}(\Delta_0) - \bar{\Phi}(\Sigma) = \bar{\xi}_{\Delta_0} F(\Delta_0) - \sum_{\text{for } \Sigma} \bar{\xi}_\Delta F(\Delta) = \sum_{\text{for } \Sigma} (\bar{\xi}_{\Delta_0} - \bar{\xi}_\Delta) F(\Delta),$$

each term of which is $\geqq 0$. Similarly for $\underline{\Phi}(\Sigma)$.

It follows that all the S_Δ of $\bar{\Phi}(\Sigma)$, $\underline{\Phi}(\Sigma)$ and of every $\Phi(\Sigma)$ are finite, since they lie between $\bar{\Phi}(\Delta)$ and $\underline{\Phi}(\Delta)$.

It follows also, by Theorems V and VII of my quoted paper, that:

If $\bar{\Phi}(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ are equivalent, for Δ, their S_Δ is unique.

In fact as $\Phi(\Sigma)$ increases by subdivision, $\bar{S}_\Sigma(\Phi)$ is unchanged by subdivision (Theorem V); hence, for every subdivision Σ' of Δ,

$$\bar{S}_\Delta(\Phi) = \bar{S}_\Delta(\underline{\Phi}) = \bar{S}_{\Sigma'}(\underline{\Phi}) \leqq \bar{S}_{\Sigma'}(\Phi);$$

but also $\bar{S}_\Delta(\Phi) \geqq \bar{S}_\Sigma(\bar{\Phi})$, since the upper S decreases by subdivision. Thus $\bar{S}_\Sigma(\bar{\Phi})$ is unchanged by subdivision, where $\bar{\Phi}(\Sigma)$ decreases by subdivision and so by the second clause of theorem VII, all $S_\Delta(\bar{\Phi})$ coincide. Q. e. d.

From all this we conclude, in view of (1), that:

A necessary and sufficient condition for all the functions $\Phi(\Sigma)$ to have the same unique finite S_Δ, is that $\bar{\Phi}(\Sigma)$ and $\Phi(\Sigma)$ are equivalent, for Δ.

Or, if we use the definition in section 1 (i):

Theorem I. *A necessary and sufficient condition for a bounded function $\xi(P)$ to be integrable Riemann with respect to a non-negative continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0, is that the two functions $\bar{\Phi}(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ defined by*

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Phi}(\Delta) &= \bar{\xi}_\Delta F(\Delta), \quad \bar{\xi}_\Delta = \text{upper} \\ \underline{\Phi}(\Delta) &= \underline{\xi}_\Delta F(\Delta), \quad \underline{\xi}_\Delta = \text{lower} \end{aligned}\right\} \text{ bound of } \xi(P) \text{ in } \Delta,$$

be equivalent for Δ_0, and we then have

$$\int_\Delta \xi(P)\, dF = \bar{S}_\Delta(\bar{\Phi}) = \underline{S}_\Delta(\underline{\Phi}) = \bar{S}_\Delta(\underline{\Phi}) = \underline{S}_\Delta(\bar{\Phi}).$$

3. By means of theorem I, we can shew that

For a function $\xi(P)$, bounded in $\dot{\Delta}_0$, to be integrable Riemann with respect to a non-negative continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0, it is sufficient that the set of points of discontinuity of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}_0$ should belong to a set $\dot{E}$ for which the non-negative additive function of sets of points $g(\dot{E})$ generated by $F(\Sigma)$ should be zero.

Let $\dot{E}_0$ be the set of points of discontinuity of $\xi(P)$. Let Σ_n describe any sequence of subdivisions of Δ_0 and let Σ_n' be the part of it for each of whose Δ the oscillation

$$\omega_{\Delta} = \bar{\xi}_{\Delta} - \underline{\xi}_{\Delta}$$

of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}$ is $\geqq \varepsilon$, a fixed positive number.

If a point P belongs to $\dot{\Sigma}_n'$ for a sequence of values of n, it belongs to a sequence of $\dot{\Delta}$ of spans diminishing to zero, in each of which $\xi(P)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$, i. e. P is a point at which $\xi(P)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$, that is to say certainly a point of $\dot{E}_0$. Otherwise expressed:

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \dot{\Sigma}_n' = \lim_{n \to \infty} (\dot{\Sigma}_n' + \dot{\Sigma}_{n+1}' + \ldots) \subset \dot{E}_0 .$$

And since

$$0 \leqq F(\Sigma_n') = g(\dot{\Sigma}_n') \leqq g(\dot{\Sigma}_n' + \dot{\Sigma}_{n+1}' + \ldots) \to g(\overline{\lim} \dot{\Sigma}_n') \leqq g(\dot{E}_0),$$

our hypothesis that $g(\dot{E}) = 0$ gives a fortiori

$$\lim_{n \to \infty} F(\Sigma_n') = 0 .$$

As $\xi(P)$ is bounded, this implies also

$$\lim \bar{\Phi}(\Sigma_n') = \lim \underline{\Phi}(\Sigma_n') = 0 .$$

Accordingly, if Σ_n'' denote the remaining part of Σ_n,

$$\lim_{n \to \infty} \{\bar{\Phi}(\Sigma_n) - \underline{\Phi}(\Sigma_n)\} = \lim_{n \to \infty} \{\bar{\Phi}(\Sigma_n'') - \underline{\Phi}(\Sigma_n'')\} \leqq \lim_{n \to \infty} \varepsilon F(\Sigma_n'') \leqq \varepsilon F(\Delta_0).$$

Since ε was arbitrary, we conclude that

$$\lim_{n \to \infty} \{\bar{\Phi}(\Sigma_n) - \underline{\Phi}(\Sigma_n)\} = 0 .$$

This expresses the equivalence of $\Phi(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ for Δ_0 and hence our proposition is proved.

4. We may also show that the above condition is necessary, i. e.

For a function $\xi(P)$, bounded in $\dot{\Delta}_0$, to be integrable Riemann with respect to a non-negative continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0, it is necessary that the points of discontinuity of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}_0$ should belong to a set $\dot{E}$ for which the function $g(\dot{E})$ generated by $F(\Sigma)$ is zero.

We shall show that $g(\dot{E}_\varepsilon) = 0$ for the $\dot{E}_\varepsilon$ of points of $\dot{\Delta}_0$ at which $\xi(P)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$. This set increases with $\frac{1}{\varepsilon}$ and has for limit, when $\varepsilon \to 0$, the set $\dot{E}_0$ of all the points of discontinuity of $\xi(P)$; at the same time, therefore, $g(\dot{E}_\varepsilon)$ increases to $g(\dot{E}_0)$. This therefore will clearly suffice to prove that $g(\dot{E}_0) = 0$.

The set $\dot{E}_\varepsilon$ of points of $\dot{\Delta}_0$ at which $\xi(P)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$ is closed, hence it is the limit of a sequence of simple closed sets $\dot{\Sigma}'_n$ each contained in the preceding and in $\dot{\Delta}_0$. Let Σ'_n be chosen so that its norm ν_{Σ_n} tends to 0 with $\frac{1}{n}$; we can neglect all Δ of Σ'_n whose $\dot{\Delta}$ do not contain some point of $\dot{E}_\varepsilon$, without affecting the limiting relation

$$\lim_{n \to \infty} \dot{\Sigma}'_n = \dot{E}_\varepsilon .$$

Hence we assume that each Δ of Σ'_n encloses a point of $\dot{E}_\varepsilon$, and therefore, for each Δ of Σ'_n,

$$\bar{\xi}_\Delta - \underline{\xi}_\Delta \geqq \varepsilon ,$$

and hence also

$$\bar{\Phi}(\Delta) - \underline{\Phi}(\Delta) \geqq \varepsilon F(\Delta) .$$

Let Σ_n be a subdivision of Δ_0, of same norm as Σ'_n, of which Σ'_n is part, and let $\Sigma''_n = \Sigma_n - \Sigma'_n$ be the additional part. We have

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\Sigma_n) - \Phi(\Sigma_n) &= \{\bar{\Phi}(\Sigma'_n) - \Phi(\Sigma'_n)\} + \{\bar{\Phi}(\Sigma''_n) - \Phi(\Sigma''_n)\} \\ &\geqq \{\bar{\Phi}(\Sigma'_n) - \underline{\Phi}(\Sigma'_n)\} \geqq \varepsilon F(\Sigma'_n) \geqq 0 . \end{aligned}$$

By theorem I, for $\xi(P)$ to be integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0, we must have for every sequence of subdivisions Σ_n of Δ_0,

$$\lim \{\bar{\Phi}(\Sigma_n) - \underline{\Phi}(\Sigma_n)\} = 0 .$$

Hence in the above

$$\lim F(\Sigma'_n) = g(\lim \dot{\Sigma}'_n) = g(\dot{E}_\varepsilon)$$

must be zero, and our statement is proved.

5. We thus obtain the following criterion:

Theorem II. (W. H. Young's criterion for integrability Riemann.) *A necessary and sufficient condition for a function $\xi(P)$, bounded in $\dot{\Delta}_0$, to be integrable Riemann with respect to a non-negative continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0, is that $\xi(P)$ be continuous in $\dot{\Delta}_0$ except, at most, at points of a set E for which the non-negative additive function of sets $g(\dot{E})$, generated by $F(\Sigma)$, vanishes.*

From theorem II, we deduce the particular

Corollary. *A necessary and sufficient condition for a bounded function $\xi(P)$ to be integrable Riemann with respect to a non-negative continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0, is that the positive and negative parts $\xi_1(P)$ and $-\xi_2(P)$ of $\xi(P)$ should be separately integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0; and we then have*

$$\int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF = \int_{\Delta_0} \xi_1(P)\, dF - \int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF.$$

The positive part of $\xi(P)$ is the function $\xi_1(P)$ equal to $\xi(P)$ where it is >0, and 0 elsewhere, *and is continuous wherever $\xi(P)$ is continuous*; for, at a point P of continuity of $\xi(P)$, if $\xi(P)>0$, $\xi_1(P')=\xi(P)$ in a whole neighbourhood of P; if $\xi(P)<0$, $\xi_1(P')=0$ in a whole neigbourhood of P; and if $\xi(P)=0$, $\xi_1(P)=\xi(P')$ or 0 at every point of the neighbourhood of P, with $\xi(P')\to 0$ at P, and so also $\xi_1(P)\to 0$ at P. The negative part of $\xi(P)$ is equal to $\xi(P)$ where it is <0 and is 0 elsewhere, and is also continuous wherever $\xi(P)$ is continuous. Theorem II then provides the necessity of the condition, while the sufficiency is obvious from the elementary propositions.

6. In order to remove the restriction that $F(\Sigma)$ be non-negative, and to obtain the general form of the criterion of integrability of a bounded function, we have only to introduce a slight refinement into our reasoning of section 4. and that part of 2. on which it is based.

Let $F(\Sigma)$ be any continuous increment and $\xi(P)$ any bounded function. Let $\bar{\Phi}(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ be functions of Σ defined by addition from

$$\bar{\Phi}(\Delta) = \begin{cases} \bar{\xi}_\Delta F(\Delta), & \text{if } F(\Delta) \geqq 0, \\ \underline{\xi}_\Delta F(\Delta), & \text{if } F(\Delta) < 0; \end{cases}$$

$$\underline{\Phi}(\Delta) = \begin{cases} \underline{\xi}_\Delta F(\Delta), & \text{if } F(\Delta) \geqq 0, \\ \bar{\xi}_\Delta F(\Delta), & \text{if } F(\Delta) < 0. \end{cases}$$

For each of the functions $\Phi(\Sigma)$ defined in section 1 (i), we have

$$\underline{\bar{\Phi}(\Sigma) \geqq \Phi(\Sigma) \geqq \underline{\Phi}(\Sigma).}$$

Indeed, for every Δ, $\bar{\xi}_\Delta - \xi_\Delta \geqq 0$ and $\underline{\xi}_\Delta - \xi_\Delta \leqq 0$, and that

$\bar{\Phi}(\Delta) - \Phi(\Delta) \geqq 0$ when $F(\Delta) \geqq 0$ follows from the first,

$\bar{\Phi}(\Delta) - \Phi(\Delta) \geqq 0$ when $F(\Delta) < 0$ follows from the second,

of these inequalities. Similarly for $\underline{\Phi}(\Delta)$.

Again, $\bar{\Phi}(\Sigma)$, *and similarly* $\underline{\Phi}(\Sigma)$, *is equivalent so some function* $\Phi(\Sigma)$. For we may choose $\bar{\xi}_1$ so that $|\bar{\xi}_1 - \xi_1| < \nu_1$, if $F(\Delta) \geqq 0$, and choose it so that $|\underline{\xi}_1 - \xi_1| < \nu_1$, if $F(\Delta) < 0$, and have then, for the corresponding function Φ,

$$|\bar{\Phi}(\Sigma - \Phi(\Sigma)| < \nu_\Sigma.$$

Similarly for $\underline{\Phi}(\Sigma)$.

It follows that with the definition of section 1:

For a bounded function $\xi(P)$ *to be integrable Riemann with respect to a continuous increment* $F(\Sigma)$, *for* Δ_0, *it is necessary (and sufficient) that* $\Phi(\Sigma)$ *and* $\underline{\Phi}(\Sigma)$, *as above defined, should have the same unique finite* S_{Δ_0}.

In particular, therefore, it is necessary that the non-negative function $\Omega(\Sigma)$ *defined by*

$$\Omega(\Delta) = \omega_\Delta |F(\Delta)|, \qquad \omega_\Delta = \bar{\xi}_\Delta - \underline{\xi}_\Delta = \textit{oscillation of } \xi(P) \textit{ in } \Delta,$$

should satisfy the relation

$$S_{\Delta_0}(\Omega) = 0.$$

In fact, $\Omega(\Delta) = (\bar{\xi}_1 - \underline{\xi}_1)|F(\Delta)| = \bar{\Phi}(\Delta) - \underline{\Phi}(\Delta)$; for when $F(\Delta) \geqq 0$, $\bar{\Phi}(\Delta) - \underline{\Phi}(\Delta) = (\bar{\xi}_\Delta - \underline{\xi}_\Delta) F(\Delta)$, and when $F(\Delta) < 0$, $\bar{\Phi}(\Delta) - \underline{\Phi}(\Delta) = (\underline{\xi}_\Delta - \bar{\xi}_\Delta) F(\Delta)$. Thus

$$\underline{\Omega(\Sigma) = \bar{\Phi}(\Sigma) - \underline{\Phi}(\Sigma),}$$

and

$$S_{\Delta_0}(\Omega) = 0$$

expresses the equivalence of $\Phi(\Sigma)$ and $\underline{\Phi}(\Sigma)$ for Δ_0.

This condition we may at once transform as follows.

7. Consider the closed set $\dot{E}_\varepsilon$ of points of Δ_0 at which $\xi(P)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$. We can choose Σ_n' as in section 4 so that

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_n' < \Delta_0; & \omega_\Delta \geqq \varepsilon \quad \text{for each } \Delta \text{ of } \Sigma_n'; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dot{\Sigma}_n' = \dot{E}_\varepsilon; & \lim\limits_{n\to\infty} \nu_{\Sigma_n'} = 0; \end{cases}$$

and complete Σ_n' to a subdivision Σ_n of Δ_0 of same norm $\nu_{\Sigma_n'}$. We then have, since $\Omega(\Sigma)$ is never negative,

$$\Omega(\Sigma_n) \geqq \Omega(\Sigma_n') \geqq \varepsilon |F|(\Sigma_n').$$

For $S_{\Delta_0}(\Omega)$ to be zero, we must have $\Omega(\Sigma_n) \to 0$, and *a fortiori*

$$|F|(\Sigma_n') \to 0, \qquad \text{when } n \to \infty;$$

or, what is equivalent to this, the values of both the positive and the negative parts of $F(\Sigma)$ for Σ_n' tend to zero with $\frac{1}{n}$, while simultaneously we have $\lim \dot{\Sigma}_n' = \dot{E}_\varepsilon$, $\lim \nu_{\Sigma_n'} = 0$.

Now by the last theorem of section VIII of my quoted paper, the positive and negative parts of $F(\Sigma)$ both have a unique S_1 everywhere, which is in fact the corresponding part in the *canonical expression of* $F(\Sigma)$ *as the difference* $F_1(\Sigma) - F_2(\Sigma)$ *of two non-negative continuous increments.* By the property of functions whose $\overline{S}$ and $\underline{S}$ are unchanged by subdivision and finite (section IV of my quoted paper) the value of the positive part of $F(\Sigma)$ for Σ_n' therefore tends, as $\nu_{\Sigma_n'}$ tends to zero, to the same limit as $F_1(\Sigma_n')$. Thus

$$\left.\begin{array}{l} \lim F_1(\Sigma_n') = 0 \\ \lim F_2(\Sigma_n') = 0 \end{array}\right\} \text{ while } \lim \dot{\Sigma}_n' = \dot{E}_\varepsilon.$$

and similarly

Let $g_1(E)$, $g_2(E)$ *denote the non-negative additive functions of sets of points generated respectivily by* $F_1(\Sigma)$ *and* $F_2(\Sigma)$. The above relations give finally

$$g_1(\dot{E}_\varepsilon) = 0,$$
$$g_2(\dot{E}_\varepsilon) = 0.$$

Now let $\varepsilon \to 0$; we find

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \underline{g_1(\dot{E}_0) = 0,} \\ \underline{g_2(\dot{E}_0) = 0.} \end{array} \right.$$

We therefore see ultimately that for a bounded function $\xi(P)$ to be integrable Riemann, for Δ_0, with respect to a continuous increment $F(\Sigma)$ whose canonical expression is

$$F(\Sigma) = F_1(\Sigma) - F_2(\Sigma),$$

it is necessary that the two non-negative additive functions $g_1(\dot{E})$ and $g_2(\dot{E})$ generated by $F_1(\Sigma)$ and $F_2(\Sigma)$ should vanish separately for the set $\dot{E}_0$ of points of discontinuity of $\xi(P)$. But this involves the integrability Riemann of $\xi(P)$ with respect to $F_1(\Sigma)$ and $F_2(\Sigma)$ separately for Δ_0, which is therefore certainly necessary, — and on the other hand is clearly also sufficient, — for the integrability Riemann of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$, for Δ_0.

Thus we are led to the theorem which reduces Riemann integration of bounded functions with respect to any continuous increment to that with respect to non-negative increments, which we have already discussed:

Theorem III. *For a bounded function $\xi(P)$ to be integrable Riemann, for Δ_0, with respect to a continuous increment $F(\Sigma)$ whose canonical expression as the difference of two non-negative continuous increments is*

$$F(\Sigma) = F_1(\Sigma) - F_2(\Sigma),$$

it is necessary and sufficient that $\xi(P)$ be integrable Riemann, for Δ_0, with respect to each of the two non-negative continuous increments $F_1(\Sigma)$ and $F_2(\Sigma)$ separately; and we then have

$$\int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF = \int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF_1 - \int_{\Delta_0} \xi(P)\, dF_2.$$

Corollary. *The Riemann integral of a bounded function $\xi(P)$ with respect to any continuous increment $F(\Sigma)$ is again a continuous increment in that part of the field of Σ in which it exists.*

8. The relations (α), on which Theorem III is based, express the fact that the upper and lower bounds of $g(\dot{E})$ in $\dot{E}_0$ are both zero, i. e. $g(\dot{E}) \equiv 0$ for every subset of $\dot{E}_0$. In fact, the functions $g_1(\dot{E})$ and $g_2(\dot{E})$ generated by $F_1(\Sigma)$ and $F_2(\Sigma)$ are precisely the two parts of the classical expression of $g(\dot{E})$ as the difference of two non-negative additive functions of sets:

$g_1(\dot{E}) =$ upper bound of $g(\dot{e})$ in $\dot{E}$ when $\geqq 0$, and otherwise zero.

$-g_2(\dot{E}) =$ lower bound of $g(\dot{e})$ in $\dot{E}$ when $\leqq 0$, and otherwise zero.

Since both sides are known to be additive functions of sets of points, we need only verify that the relations hold for each $\dot{E} = \dot{\Delta}$. In that case we have

$g_1(\dot{\Delta}) = F_1(\dot{\Delta}) =$ upper bound of $F(\Sigma)$, or $g(\dot{\Sigma})$, in $\dot{\Delta}$, when $\geqq 0$, and otherwise zero.

Given any $\dot{E}$ in $\dot{\Delta}$, by the mode of generation of $g(\dot{E})$ we can find a $\dot{\Sigma}$ in $\dot{\Delta}$, for which $g(\dot{\Sigma}) = F(\Sigma)$ differs from $g(\dot{E})$ by less than an arbitrary ε. It follows therefore that

$g_1(\dot{\Delta}) =$ upper bound of $g(\dot{e})$ in $\dot{\Delta}$, when $\geqq 0$, and otherwise zero.

And similarly for $g_2(\dot{\Delta})$. Q. e. d.

The criterion of integrability of a bounded function with respect to any continuous increment may accordingly be thus expressed:

Theorem IV. *A necessary and sufficient condition for a function $\xi(P)$, bounded in Δ_0, to be integrable Riemann with respect to a continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0, is that $\xi(P)$ be continuous in Δ_0 except, at most, at points of a set $\dot{E}$ in which the additive function of sets $g(\dot{E})$ generated by $F(\Sigma)$ vanishes identically.*

This condition is entirely independent of the field in which $F(\Sigma)$ is defined, depending as it does only on the function of sets $g(\dot{E})$ generated by $F(\Sigma)$; so that $\xi(P)$ is always integrable, or not, simultaneously for all the continuous increments which may be deduced from $g(\dot{E})$. It also follows that there can be no difference between the various integrals which we may so obtain for any given Δ, since by composing two perfect fields we of course again get a perfect field which contains them both.

More particularly, in defining the integral of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$, we may at once assume the field of Σ so extended that each element of the field is now a subdivision of a unit of the field. If we do this, the treatment of the integral of a bounded function undergoes no change, while that of the integral of an unbounded function, as developed hereafter, is considerably simplified.

We shall accordingly introduce this modification, i. e. assume that every simple closed set with a representative in the field has a representative unit in the field.

9. Let $\xi(P)$ be any function of position, integrable Riemann in such a field, with respect to a given continuous increment $F(\Sigma)$ for Δ_0.

Let P be any point of Δ_0 in the neighbourhood of which $\xi(P)$ is unbounded above, i. e. such that $\xi(P)$ is unbounded above in every Δ of Δ_0, however small in span, containing P as a an interior point relatively to Δ_0; and let $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, be any sequence of such Δ, no two of which are identical, and whose spans diminish to zero. Complete Δ_n to a subdivision $\Sigma_n = \Delta_n + \Sigma_n'$ of Δ_0, of norm ν_{Δ_n}; choose ξ_Δ arbitrarily for each Δ of Σ_n' and for each Δ_n for which $F(\Delta_n) \leqq 0$. For the remaining Δ_n, if any, i. e. those for which

$$F(\Delta_n) > 0,$$

take ξ_{Δ_n} so large that with the given choice of ξ_Δ in Σ_n',

$$\xi_{\Delta_n} F(\Delta_n) > \frac{1}{\nu_{\Delta_n}} + |\Phi(\Sigma_n')|.$$

We have then for all n for which $F(\Delta_n) > 0$,

$$\Phi(\Sigma_n) = \xi_{\Delta_n} F(\Delta_n) + \Phi(\Sigma_n') > \frac{1}{\nu_{\Delta_n}}.$$

But by the assumed integrability of $\xi(P)$, $\Phi(\Sigma_n)$ must tend to a unique finite limit as $\nu_{\Sigma_n} = \nu_{\Delta_n} \to 0$, so that the inequality

$$\Phi(\Sigma_n) > \frac{1}{\nu_{\Delta_n}}$$

can only hold for a finite number of values of n. I. e.:

Except for a finite number of values of n, we must have

$$F(\Delta_n) \leqq 0.$$

Changing $F(\Sigma)$ to $-F(\Sigma)$, with respect to which $\xi(P)$ is of course also integrable Riemann, by the elementary propositions, we see that $F(\Delta_n)$ must also be $\geqq 0$ from a definite stage on, i. e. be ultimately $= 0$.

Changing $\xi(P)$ to $-\xi(P)$ we obtain the analogous result for a point in the neighbourhood of which $\xi(P)$ is unbounded below. Hence:

If $\xi(P)$ is integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$, for Δ_0, then for every sequence of $\dot{\Delta}_n$ in $\dot{\Delta}_0$, of spans diminishing to zero, having as common interior point relatively to $\dot{\Delta}_0$ a point of $\dot{\Delta}_0$ in whose neighbourhood $\xi(P)$ is unbounded, we must have from a definite stage on

$$F(\Delta_n) = 0.$$

It follows by the usual argument that given any point P in whose neighbourhood $\xi(P)$ is unbounded in $\dot{\Delta}_0$, all $\dot{\Delta}$ in $\dot{\Delta}_0$ of spans less than some positive number η_P and containing P as an interior point relatively to $\dot{\Delta}_0$, must give

$$F(\Delta) = g(\dot{\Delta}) = 0,$$

$g(\dot{E})$ being the additive function of sets generated by $F(\Sigma)$.

We now use the fact that every simple closed set with a representative in the field has a representative unit in the field[6]). This means that for every such simple closed set $\dot{\Sigma}$ in $\dot{\Delta}_0$, containing P as an interior point relatively to $\dot{\Delta}_0$ and of span $< \eta_P$, we must have $F(\Sigma) = 0$; and hence also, by a passage to the limit, for every $\dot{\Sigma}_n$ in $\dot{\Delta}_0$ containing P

---

[6]) In the case of special types of field, such as the field whose units represent all rectangular intervals over whose frontier $g(\dot{e}) = 0$ identically, or all wedges satisfying the same condition, this modification it not necessary for the argument, though it would still involve a considerable simplification. What is here required is that the value of $g(\dot{E})$ for any $\dot{\Sigma}$, for the field considered, situated in a given neighbourhood of any given point P, should be obtainable, by a finite number of additions, subtractions and limiting processes from its values for those $\dot{\Delta}$, in that neighbourhood, which contain P as an interior point. This may be seen more or less intuitively to be true in the case of those special fields, though it is difficult to prove rigorously in a general language.

If, on the contrary, every $\dot{\Sigma}$ is also a $\dot{\Delta}$ for the field considered, the property, is obvious in virtue of the fundamental characteristics of a perfect field; for if $\dot{\Sigma}$ does not contain P, we can find a $\dot{\Delta}$ containing P as an interior point and distinct from $\dot{\Sigma}$; $(\dot{\Sigma} + \dot{\Delta})$ then also contains P as an interior point and has a representative unit Δ_1 in the field, and $\dot{\Delta} + \dot{\Sigma} = \dot{\Delta}_1$; while if $\dot{\Sigma}$ contains P as a frontier point, it is the limit of $\dot{\Sigma} = \dot{\Delta}$'s containing P as an interior point.

and of span $< \eta_P$. But every Σ in a neighbourhood of P of span $< \eta_P$, is expressible as the difference of two Σ of spans $< \eta_P$ both containing P. Hence $F(\Sigma)$ must vanish for every Σ in $\dot{\Delta}_0$ in that neighbourhood of P, and hence, by the mode of generation of $g(\dot{E})$, we must have $g(\dot{E}) \equiv 0$ identically in that neighbourhood. Thus we arrive at the following result:

For a function $\xi(P)$ to be integrable Riemann with respect to a continuous increment $F(\Sigma)$ for $\dot{\Delta}_0$, in the extended field in which every element is a subdivison of a unit of the field, it is necessary that the function $g(\dot{E})$ generated by $F(\Sigma)$ should vanish identically throughout some neighbourhood in $\dot{\Delta}_0$ of each point of infinite discontinuity of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}_0$.

In other words, using the Heine-Borel theorem, *the closed set $\dot{E}_\infty$ of points of infinite discontinuity of $\xi(P)$ in $\dot{\Delta}_0$ must be interior, relatively to $\dot{\Delta}_0$, to a simple closed set in $\dot{\Delta}_0$, — and hence to one with a representative Σ_∞ in the field, — throughout which $g(\dot{E}) \equiv 0$ identically.*

$\xi(P)$ is bounded outside $\dot{\Sigma}_\infty$; for any sequence of points in $\dot{\Delta}_0$ for which $\xi(P)$ describes an unbounded succession of values, necessarily accumulates about a point of $\dot{E}_\infty$ and is therefore ultimately interior to $\dot{\Sigma}_\infty$ relatively to $\dot{\Delta}_0$.

Let us complete Σ_∞ to a subdivision $\Sigma_\infty + \Sigma_0$ of Δ_0. By the elementary proposition (e), since $F(\Sigma) \equiv 0$ identically in $\dot{\Sigma}_\infty$, every function of position is integrable Riemann with respect to $F(\Sigma)$ for Σ_∞, and has its integral zero. Hence the integral of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0 coincides with its integral for Σ_0, and in $\dot{\Sigma}_0$, $\xi(P)$ is bounded. Thus by Theorem IV, the set of points of discontinuity of $\xi(P)$ outside $\dot{\Sigma}_\infty$ is one in which $g(\dot{E})$ vanishes identically. We thus obtain the general form of the condition of integrability Riemann with respect to a continuous increment, the necessity of which we have just established and which is also obviously sufficient:

Theorem V. *A necessary and sufficient condition for $\xi(P)$ to be integrable Riemann for Δ_0 with respect to a continuous increment $F(\Sigma)$, (in a field each of whose elements is a subdivision of a unit of the field), is that $\xi(P)$ should be continuous in $\dot{\Delta}_0$ except at most at points of a set $\dot{E}_0$ in which the additive function of sets $g(\dot{E})$ generated by $F(\Sigma)$ vanishes identically, and bounded except at most in a simple closed set $\dot{\Sigma}_\infty$ in which $g(\dot{E})$ also vanishes identically.*

The function $\xi_\infty(P)$ equal to $\xi(P)$ in $\dot{\Sigma}_\infty$ and elsewhere zero has, with respect to $F(\Sigma)$, a Riemann integral which vanishes identically for every Δ. In fact

$$\int_{\Delta} \xi_\infty(P)\, dF = \int_{\dot{\Sigma}_1} \xi_\infty(P)\, dF + \int_{\dot{\Sigma}_2} \xi_\infty(P)\, dF;$$

here $\dot{\Sigma}_1$ belongs to $\dot{\Sigma}_\infty$, where $F(\Sigma) \equiv 0$, and $\dot{\Sigma}_2$ belongs to its complementary (disregarding the frontier), where $\xi_\infty(P) \equiv 0$.

The function $\xi_0(P) = \xi(P) - \xi_\infty(P)$ is equal to $\xi(P)$ outside $\dot{\Sigma}_\infty$ and elsewhere zero, and is therefore bounded. Thus:

Theorem VI. *A necessary and sufficient condition for the integrability Riemann of $\xi(P)$ with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0, is also that $\xi(P)$ be the sum of a function $\xi_\infty(P)$ whose integral with respect to $F(\Sigma)$ vanishes identically, and of a bounded function $\xi_0(P)$, integrable with respect to $F(\Sigma)$ for Δ_0, whose integral is then the required integral of $\xi(P)$.*

(Eingegangen am 27. Januar 1928.)

Quaternionen mit Komponenten aus einem Körper von Primzahlcharakteristik.

Von

Herbert Rauter in Königsberg.

Man kann dem von Hamilton schon im Jahre 1843 geschaffenen Quaternionenbegriff dadurch neues Leben einhauchen, daß man statt der reellen bzw. rationalen Zahlen einen abstrakten andersgearteten Komponentenbereich zugrunde legt. Im § 1 werden eingangs die Komponenten einem beliebigen abstrakten Körper im Sinne von E. Steinitz[1]) entnommen, um gleich darauf spezialisiert zu werden auf Elemente des Körpers der rationalen Funktionen einer Unbestimmten t mit Koeffizienten aus einem beliebigen endlichen Körper. Es wird sich dabei zeigen, daß sich mit diesen Komponenten eine in mancher Beziehung ähnliche Theorie aufbauen läßt, wie sie uns Hurwitz in seinem schönen Werkchen: Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen, Berlin 1919[2]) beschert hat, daß aber auch wegen des Auftretens von Nullteilern wesentliche Abweichungen zutage treten.

Ist $\mathfrak{P}$ ein endlicher Körper (Galoissches Feld) von $p_0 = p^{m_0}$ Elementen, so ist $k = \mathfrak{P}(t)$ der fragliche Körper, aus dem die Komponenten entnommen werden sollen. Im Körper k gelten auch ganz ähnliche Gesetze wie im Körper der rationalen Zahlen[3]). Für die „ganzen" Größen von k, d. h. die ganzen rationalen Funktionen von t:

$$\gamma = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1}$$

[1]) Vgl. etwa H. Hasse, Höhere Algebra, Sammlung Göschen, S. 11, Def. 2. Herrn H. Hasse danke ich für eine Reihe von wertvollen Bemerkungen und Abänderungsvorschlägen. Insbesondere entsprang seiner Anregung die Heranziehung des Idealbegriffes bei Definition 7, die ich zunächst auf den Euklidischen Algorithmus gegründet hatte, sowie die Bemerkung auf S. 248 hinsichtlich der Nullteiler des Quaternionenring es für $p = 2$.

[2]) Im folgenden zitiert mit H.

besteht ein Euklidischer Algorithmus, infolgedessen eine eindeutige Zerlegbarkeit in Primelemente, so daß alle Ideale in k Hauptideale werden.

Dieser Umstand hat zur Folge, daß sich in k eine der Theorie von Hensel ganz analoge π-adik schaffen läßt, so daß jede π-adische Größe von k die Gestalt [3])

$$\alpha = \alpha_n \pi^n + \alpha_{n+1} \pi^{n+1} + \cdots \qquad (n \gtreqless 0 \text{ ganz rational}) \tag{2}$$

annimmt, wo π ein Primelement von k, die α_i Elemente eines vollständigen Restsystems mod π bedeuten und die Reihe im Endlichen nicht abzubrechen braucht.

Den Integritätsbereich J der ganzen Größen (1) von k werden wir weiterhin „bewerten", indem wir jedem Element (1) von J die Zahl

$$|\gamma| = p_0^n \tag{3}$$

zuordnen, den „absoluten Betrag" von γ, wenn n der Grad von γ in t ist. Diese Bewertung gewinnt für den vorliegenden Integritätsbereich dadurch eine besondere Bedeutung, daß der „absolute Betrag" von γ gleichzeitig die Anzahl der Restklassen der ganzen Größen von k mod γ angibt. Der Integritätsbereich J wird dadurch nach der Terminologie von F. K. Schmidt [4]) ein „natürlich bewerteter" Integritätsbereich. Dieser Umstand ist für das Gelingen der Übertragung und die Analogie mit den gewöhnlichen Quaternionen vielfach grundlegend und gewinnt noch dadurch erhöhte Bedeutung, daß der Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen und der vorliegende, beide mit dem „absoluten Betrag" bewertet, die einzigen natürlich bewerteten Integritätsbereiche sind [4]).

Bezüglich der Wahl der Bezeichnungen wollen wir noch vorausschicken, daß die Elemente von $\mathfrak{R}$ mit kleinen lateinischen, die Größen von k mit kleinen griechischen, die Quaternionen selbst mit großen lateinischen Buchstaben geschrieben werden sollen.

§ 1.

Grundlegende Definitionen und Tatsachen.

Jeder Ausdruck

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 , \tag{4}$$

wo α_0, α_1, α_2, α_3, seine „Komponenten", vorläufig also irgendwelche Ele-

[3]) Vgl. H. Rauter, Über die Darstellbarkeit durch quadr. Formen im Körper d. rat. Funkt. ein. Unbest. über d. Restklassenkörper mod p. Dissertation, Braunschweig 1926, § 1, zitiert mit „Dissertation"; k ist im Sinne der Terminologie von E. Steinitz ein unvollkommener Körper.

[4]) F. K. Schmidt, Zur Zahlentheorie in Körpern von der Charakteristik p. Sitzungsberichte der phys.-med. Sozietät in Erlangen **58/59** (1926/27), S. 167.

mente eines abstrakten Körpers bedeuten sollen, wird auch jetzt ein „Quaternion“ genannt werden. Die vier Einheiten $i_0 = 1$, i_1, i_2, i_3 sollen wieder den Gleichungen

$$\begin{aligned} &i_0 i_k = i_k i_0 = i_k, && (k = 0, 1, 2, 3)\\ &i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1,\\ &i_1 i_2 = i_3;\ i_2 i_3 = i_1;\ i_3 i_1 = i_2,\\ &i_2 i_1 = -i_3;\ i_3 i_2 = -i_1;\ i_1 i_3 = -i_2 \end{aligned} \tag{5}$$

genügen. Summe, Differenz und Produkt zweier Quaternionen wird formal genau so gebildet wie bei H., S. 2—4. Wir merken nur noch die Formel für das Produkt zweier Quaternionen an. Wird

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3, \qquad B = \beta_0 + \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 + \beta_3 i_3,$$
$$A B = \pi_0 + \pi_1 i_1 + \pi_2 i_2 + \pi_3 i_3$$

gesetzt, so bestimmen sich $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3,\\ \pi_1 &= \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\\ \pi_2 &= \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1,\\ \pi_3 &= \alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Multiplikation der Quaternionen befolgt das assoziative und distributive, aber im allgemeinen nicht das kommutative Gesetz. Jedoch geht aus der Formel

$$AB - BA = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) i_1 + 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) i_2 + 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) i_3 \tag{7}$$

hervor, daß das kommutative Gesetz gilt, wenn die Charakteristik unseres abstrakten Körpers $p = 2$ ist. Sonst ist A mit B jedenfalls vertauschbar, wenn

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 \tag{8}$$

ist.

Ist (4) ein beliebiges Quaternion, so heiße

$$A' = \alpha_0 - \alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2 - \alpha_3 i_3 \tag{9}$$

das zu A *konjugierte* Quaternion. Für das Produkt von A mit A' ergibt sich aus (6)

$$A A' = A' A = n(A) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 . \tag{10}$$

Dies Produkt werde symbolisch durch $n(A)$ bezeichnet und die „Norm“ von A genannt. Es ist gleich der Summe der Quadrate der Komponenten von A, also ein Element des zugrunde gelegten Körpers. Ferner gilt

$$(AB)' = B' A' \tag{11}$$

und das Multiplikationstheorem der Norm:

Satz 1. *Die Norm des Produktes zweier Quaternionen ist gleich dem Produkte ihrer Normen. In Formeln:*

$$n(AB) = n(A)\,n(B). \tag{12}$$

Der Beweis verläuft ganz wie bei H.

Gehen wir jetzt von dem beliebigen abstrakten Körper zu dem speziellen $k = \mathfrak{P}(t)$ mit der Charakteristik p über, so zeigt sich eine wesentliche Abweichung gegenüber der Theorie von Hurwitz.

Als das Quaternion „Null" werden wir natürlich dasjenige zu bezeichnen haben, dessen sämtliche Komponenten verschwinden. Während nun aber bei Hurwitz der Satz gilt, daß das Produkt zweier Quaternionen nur dann verschwinden kann, wenn einer der Faktoren Null ist, kann jetzt sehr wohl das Gegenteil der Fall sein. Es kann sehr wohl

$$A\,A' = n(A) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \tag{13}$$

werden, ohne daß alle Komponenten verschwinden. Quaternionen dieser Art werden wir zweckmäßig als „Nullteilerquaternionen" oder kurz „Nullteiler" bezeichnen.

Der Existenzbeweis der Nullteilerquaternionen kann so geführt werden, daß nach der Existenz von „Darstellungen" der Null durch die quaternäre quadratische Form

$$f(x) \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{14}$$

in $k = \mathfrak{P}(t)$ gefragt wird. Dieses Problem ist in meiner Dissertation[3]) für den speziellen Fall des Grundkörpers $\mathfrak{P}_0(t)$ gelöst worden, wo $\mathfrak{P}_0$ der Restklassenkörper mod p ist (p = Primzahl $\neq 2$). Die dortigen Sätze 10 und 13 zeigen, daß solche Darstellungen durch die obige Form (14) in $\mathfrak{P}_0(t)$ immer vorhanden sind. Da $\mathfrak{P}_0$ als typischer Repräsentant eines beliebigen endlichen Körpers mit p Elementen angesehen werden kann, jeder beliebige endliche Körper aber einen Körper $\mathfrak{P}_0$ als Unterkörper enthält, ist die Existenz der Nullteiler für jede ungerade Charakteristik nachgewiesen. Für die Charakteristik $p = 2$ aber zeigt schon das Beispiel

$$A = 1 + i, \qquad n(A) = 1 + 1 = 2 = 0$$

das Vorhandensein von Nullteilern.

Zusatz bei der Korrektur: Solche Nullteiler treten z. B. auch auf, wenn als Komponentenbereich der Quaternionen der Körper der Gaußschen komplexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ gewählt wird, wie das einfache Beispiel $A = 1 + \sqrt{-1}\,i_1$, $n(A) = 1^2 + (\sqrt{-1})^2 = 0$ zeigt.

Im Gegensatz zu diesen Nullteilern werden wir diejenigen Quaternionen, deren Norm $\neq 0$ ist, als „reguläre" Quaternionen bezeichnen. Das Pro-

dukt zweier regulärer Quaternionen verschwindet also niemals. Dagegen wird das Produkt eines Nullteilerquaternions mit einem regulären Quaternion nach Satz 1 wieder ein Nullteiler.

Die Folge des Auftretens der Nullteiler ist, daß die Division im Bereiche unserer Quaternionen nicht mehr unbeschränkt ausführbar ist, daß also nicht mehr wie in H. ein Quaternionenkörper, sondern nur ein Quaternionenring vorliegt.

Ist nun A ein reguläres Quaternion, also $n(A) \neq 0$, so werden wir das Quaternion

$$A^{-1} = \frac{1}{n(A)} A' \tag{15}$$

als das „*zu A inverse*“ Quaternion bezeichnen können, denn es genügt der Gleichung

$$A A^{-1} = A^{-1} A = 1 \tag{16}$$

und ist durch jede dieser Gleichungen auch eindeutig bestimmt. Denn gäbe es noch ein zweites A_1, so daß

$$A A_1 = 1,$$

so würde durch Subtraktion

$$A(A^{-1} - A_1) = 0,$$
$$A' A(A^{-1} - A_1) = n(A)(A^{-1} - A_1) = 0$$

folgen, und wegen $n(A) \neq 0$: $A^{-1} = A_1$. Zu jedem regulären Quaternion existiert also ein und nur ein inverses. Die regulären Quaternionen bilden demnach in bezug auf Multiplikation eine Gruppe.

Nunmehr können wir auch die Division erledigen. Ist A ein reguläres Quaternion, so wird es im allgemeinen zwei verschiedene Quotienten eines Quaternions B durch das Quaternion A geben. Diese Quotienten sind nämlich bezüglich die Lösungen der beiden Gleichungen

$$X A = B \quad \text{bzw.} \quad A X = B; \tag{17}$$

man findet sie in der Form

$$X = B A^{-1} \quad \text{bzw.} \quad X = A^{-1} B. \tag{18}$$

Dabei sind die Lösungen eindeutig bestimmt.

Ist dagegen A Nullteiler, so haben die beiden Gleichungen (17) sicher dann *keine* Lösung, wenn B ein reguläres Quaternion ist, wie sich durch Bildung der Norm auf beiden Seiten sofort ergibt. Ist auch B Nullteiler, so sind Lösungen möglich, indessen lassen sich über Existenz und Eindeutigkeit keine bestimmten Aussagen machen.

Zusatz bei der Korrektur: Ist N irgendein Nullteilerquaternion, so betrachten wir alle diejenigen regulären Quaternionen A bzw. B, die den Gleichungen

$$(*) \qquad AN = N \quad \text{bzw.} \quad NB = N$$

genügen. Wie man sich leicht überzeugt, bilden sie eine Gruppe, da mit A, A_1 bzw. B, B_1 auch AA_1 bzw. BB_1 zu dieser Gesamtheit gehören. Wir wollen sie als die *links-* bzw. *rechtshändige Identitätsgruppe von* N bezeichnen. (Vgl. dazu meine Arbeit über „Abstrakte Kompositionssysteme oder Übergruppen", die demnächst im Journ. f. d. r. u. a. Math. erscheinen wird, wo die hier vorliegenden Beziehungen abstrakt-gruppentheoretisch erfaßt sind.) Setzen wir $N = \nu_0 + \nu_1 i_1 + \nu_2 i_2 + \nu_3 i_3$, so folgt aus der ersten Gleichung (*) in Verbindung mit den Formeln (6), daß die Komponenten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der fraglichen Quaternionen A die Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_0\nu_0 - \alpha_1\nu_1 - \alpha_2\nu_2 - \alpha_3\nu_3 &= \nu_0 \\
\alpha_0\nu_1 + \alpha_1\nu_0 + \alpha_2\nu_3 - \alpha_3\nu_2 &= \nu_1 \\
\alpha_0\nu_2 - \alpha_1\nu_3 + \alpha_2\nu_0 + \alpha_3\nu_1 &= \nu_2 \\
\alpha_0\nu_3 + \alpha_1\nu_2 - \alpha_2\nu_1 + \alpha_3\nu_0 &= \nu_3
\end{aligned}$$

sind. Bedenkt man, daß $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ nicht sämtlich 0 sein dürfen, und betrachtet man die obigen Gleichungen als homogene lineare Gleichungen in $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, so erkennt man, daß die $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ notwendig der Determinantenbedingung

$$\begin{vmatrix}
\alpha_0 - 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\
\alpha_1 & \alpha_0 - 1 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\
\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 - 1 & -\alpha_1 \\
\alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 - 1
\end{vmatrix} = 0$$

genügen müssen. Betrachtet man die obigen Gleichungen naturgemäß als Bestimmungsgleichungen für $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so sieht man sofort, daß nur die triviale Lösung $A = 1$ vorhanden ist, wenn die Koeffizientendeterminante der $\nu_i \neq 0$ ist. Zum Vorhandensein von der Einheitsgruppe verschiedener Identitätsgruppen ist daher als weitere Bedingung erforderlich das Verschwinden der Koeffizientendeterminante aus den ν_i. Analoges gilt für die regulären Quaternionen B.

Die bisherigen Resultate der Division der Quaternionen lassen sich leicht dahin verallgemeinern, daß auch jede rationale Funktion

$$R(A, B, C, \ldots)$$

von beliebigen Quaternionen $A, B, C, \ldots$ wieder ein wohlbestimmtes

Quaternion ist, sofern nur die Nenner, soweit sie auftreten sollten, reguläre Quaternionen darstellen.

Während Hurwitz die Theorie der Automorphismen (Permutationen) seines Quaternionenkörpers vollständig und glatt erledigen konnte, stellen sich in unserem Falle erhebliche Schwierigkeiten ein. Soll die Definition des Automorphismus überhaupt einigen Wert haben, so werden wir vor allem auf *eineindeutige* Zuordnung bedacht sein müssen.

Definition 1. Ist jedem Quaternion A des Ringes nach einem bestimmten Gesetze ein Quaternion $f(A)$ zugeordnet, so heißt die Substitution $A \to f(A)$ ein Automorphismus des Quaternionenringes, wenn die Zuordnung eineindeutig ist und jede sinnvolle Gleichung zwischen Quaternionen des Ringes wieder in eine richtige Gleichung übergeht.

Dann beweisen wir den

Satz 2. *Die Substitution $A \to f(A)$ ist dann und nur dann ein Automorphismus des Quaternionenringes, wenn die Quaternionen $f(A)$ nicht sämtlich 0 sind, kein einem Nullteiler N zugeordnetes Quaternion $f(N)$ verschwindet und die beiden Gleichungen*

$$f(A+B) = f(A) + f(B), \qquad f(AB) = f(A)f(B) \tag{19}$$

erfüllt sind, unter A und B zwei beliebige Quaternionen verstanden.

Die ersten Forderungen des Satzes zielen darauf ab, die in Definition 1 geforderte Eineindeutigkeit der Zuordnung herzustellen. Die Gleichungen (19) ziehen die weiterhin geforderte Invarianz der Gleichungen nach sich.

Die Eindeutigkeit der Zuordnung folgt daraus, daß dem Quaternion 0 und nur ihm wieder das Quaternion $f(0) = 0$ zugeordnet ist. Nach (19) folgt

$$\begin{aligned} f(A+0) &= f(A) + f(0), \\ f(0) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Es gibt ferner kein anderes Quaternion A, dessen $f(A) = 0$ wird. Denn aus der zweiten Gleichung (19) folgt dann aus $f(A) = 0$, daß $f(AB) = 0$ wird für jedes Quaternion B. Ist nun A zunächst regulär, so ist B immer so wählbar, daß AB ein beliebiges Quaternion C wird; es würden dann also gegen die Voraussetzung sämtliche $f(C)$ verschwinden. Ist aber A Nullteiler, so ist $f(A) = 0$ nach Voraussetzung ausgeschlossen. Jetzt ist die Zuordnung aber eineindeutig. Denn ist $A \neq B$, so würde aus $f(A) = f(B)$ folgen $f(A) - f(B) = f(A - B) = 0$, [5]) also nach vorigem $A - B = 0$, $A = B$, gegen die Voraussetzung.

Es folgt jetzt weiter, daß einem regulären Quaternion A kein Nullteilerquaternion $f(A)$ zugeordnet sein kann. Denn wäre dies der Fall,

[5]) Vgl. H., S. 10.

so würde es ein Quaternion $f(A_1) = [f(A)]'$ geben[6]), so daß

$$f(A) f(A_1) = f(A A_1) = 0,$$
$$A A_1 = 0$$

würde, gegen die Voraussetzung, daß A regulär ist.

Jetzt folgt ebenso wie bei H., daß die Bedingungen von Satz 2 hinreichend sind. Da sie offenbar auch notwendig sind, ist Satz 2 bewiesen.

Machen wir, um besonders einfache Bedingungen zu schaffen, die weitere Voraussetzung, daß bei dem Automorphismus die Größen von k wieder in solche von k übergehen sollen, so folgt wegen $f(1) = 1$ (welche Beziehung man aus (19) sofort folgert), wenn g ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{P}$ bezeichnet, aus $g^{p_0-1} = 1$ die Gleichung $f(g^{p_0-1}) = f(g)^{p_0-1} = f(1) = 1$ und unter Berücksichtigung dessen, daß wegen der Eindeutigkeit keine frühere Potenz von $f(g)$ gleich 1 werden kann, daß g bei dem Automorphismus wieder in ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{P}$ übergehen muß. Aus demselben letzteren Grunde muß die transzendente Größe t wieder in eine transzendente Größe übergehen. Es kann daher unbeschadet der Allgemeinheit $f(g) = g$ und $f(t) = t$ angenommen werden.

Als Beispiel eines Automorphismus sei folgendes genannt: Bedeutet Q ein beliebiges, aber festgehaltenes reguläres Quaternion, so sei einem beliebigen Quaternion A des Quaternion

$$A \to Q A Q^{-1} \tag{21}$$

zugeordnet. Man überzeugt sich sofort, daß die Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind. Indessen stößt der Beweis der Umkehrung, den H. geben konnte, hier auf bisher unüberwindliche Schwierigkeiten.

§ 2.

Die ganzen Quaternionen.

Wir führen den Begriff des Moduls ein durch die

Definition 2. Ein System von Quaternionen, so daß mit A und B auch $\alpha A + \beta B$ zum Systeme gehören, wo α und β ganze Größen aus k bedeuten, soll „Modul" genannt werden. Ein Modul soll endlich heißen, wenn es eine endliche Anzahl von Quaternionen des Moduls gibt:

[6]) Herr Hasse machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß die *Existenz* eines $f(A_1) = [f(A)]'$ aus den Forderungen von Satz 2 nicht in jedem Falle zu folgen braucht. Zum Beweise der vorliegenden Teilbehauptung, daß einem regulären Quaternion wieder ein reguläres Quaternion entspricht, würde demnach noch die Zusatzforderung notwendig sein, daß stets mit einem Quaternion $f(A)$ auch das konjugierte $[f(A)]'$ das Bild eines Quaternions A_1 wird.

$A_1, A_2, \ldots, A_r$, so daß jedes Quaternion A des Moduls in der Form

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_r A_r \tag{22}$$

dargestellt werden kann, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ganze Funktionen aus k bedeuten. $A_1, A_2, \ldots, A_r$ heißen eine *Basis* des Moduls und dieser wird symbolisch bezeichnet durch $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$.

Satz 3. *Jeder endliche Modul besitzt eine Basis von vier Quaternionen der Gestalt*

$$A_0 = \alpha_{00}; \quad A_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} i_1; \quad A_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21} i_1 + \alpha_{22} i_2; \tag{23}$$
$$A_3 = \alpha_{30} + \alpha_{31} i_1 + \alpha_{32} i_2 + \alpha_{33} i_3.$$

Der Beweis dieses Satzes wird in der üblichen aus der Modultheorie bekannten Weise geführt unter Berücksichtigung des Umstandes, daß in k alle Ideale Hauptideale sind.

Um nun zur Definition der „ganzen" Quaternionen zu kommen, wollen wir unter einem „Teilring" der „rationalen" Quaternionen des § 1 einen endlichen Modul verstehen, innerhalb dessen außer den Operationen der Addition und Subtraktion auch die der Multiplikation unbeschränkt ausführbar ist. Dann kann ebenso wie bei H. die Aufgabe gestellt werden, alle Teilringe zu bestimmen, die die vier Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ enthalten. Es gilt darüber der

Satz 4. *Ist p ungerade, so fällt jeder Teilring J innerhalb des Ringes der rationalen Quaternionen, der die vier Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ enthält, zusammen mit dem Modul*

$$[1, i_1, i_2, i_3].$$

Der Beweis läßt sich ähnlich wie bei H. führen. Eine Basis des Teilringes sei gegeben durch

$$Q_0 = \frac{\alpha_0}{\mu}, \quad Q_1 = \frac{\beta_0 + \beta_1 i_1}{\mu}, \quad Q_2 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2}{\mu},$$
$$Q_3 = \frac{\delta_0 + \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3}{\mu}.$$

Da $1, i_1, i_2, i_3$ im Teilring enthalten sein sollen, ergibt sich aus Satz 3 leicht, daß $\alpha_0, \beta_1, \gamma_2, \delta_3$ ganze Größen aus k von der Art sein müssen, daß ihre absoluten Beträge sämtlich $\leqq |\mu|$ sein müssen. Da nun Q_0^2 im Teilring vorkommt, aber eine Größe aus k ist, so muß gesetzt werden können $Q_0^2 = \varkappa Q_0$, wo $\varkappa$ ganz in k. Daraus folgt aber $Q_0 = \varkappa$ ganz in k und wegen $|\alpha_0| \leqq |\mu|$, daß $\alpha_0 = \mu$ gesetzt werden, demnach

$$Q_0 = 1 \tag{26a}$$

angenommen werden kann.

Um Q_1 zu bestimmen, möge $Q_1 = \alpha + \beta i$ gesetzt werden, wo demnach wegen $|\beta_1| \leqq |\mu| \quad |\beta| = \left|\frac{\beta_1}{\mu}\right| \leqq 1$ werden muß. Dann kann

$$Q_1^2 = 2\alpha Q_1 - (\alpha^2 + \beta^2),$$

da es nur die Einheiten 1 und i_1 enthalten kann, aus Q_0 und Q_1 in folgender Weise zusammengesetzt werden:

$$Q_1^2 = \varkappa_0 Q_0 + \varkappa_1 Q_1,$$

wo $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ ganz in k. Durch Koeffizientenvergleichung folgt

$$\varkappa_0 = -(\alpha^2 + \beta^2), \qquad \varkappa_1 = 2\alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist zu entnehmen, daß sowohl α wie β ganz in k sein müssen. Aus $|\beta| \leqq 1$ folgt dann wieder, daß $\beta = 1$ gesetzt werden kann. Nun ändert sich der Modul $[Q_0, Q_1, Q_2, Q_3] = [1, \alpha + i, Q_2, Q_3]$ nicht, wenn Q_1 ersetzt wird durch $Q_1 - \alpha Q_0 = i_1$. Wir dürfen daher für Q_1 das Quaternion i_1 wählen und setzen:

(26b) $$Q_1 = i_1.$$

Ist nun $\alpha_0 + \alpha_1 i_1$ ein im Teilring J vorkommendes Quaternion, das nur die Einheiten 1 und i_1 enthält, so muß es die Form

$$\varkappa_0 Q_0 + \varkappa_1 Q_1 = \varkappa_0 + \varkappa_1 i_1$$

haben, wo $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ ganz in k sind. Daraus folgt, daß $\alpha_0 = \varkappa_0$ und $\alpha_1 = \varkappa_1$ ganz in k sein müssen. Unter Berücksichtigung der Gleichberechtigung der drei Einheiten i_1, i_2, i_3 erhalten wir den

Hilfssatz. Kommt ein Quaternion von einer der drei Formen

$$\alpha_0 + \alpha_1 i_1, \quad \alpha_0 + \alpha_2 i_2, \quad \alpha_0 + \alpha_3 i_3$$

im Teilring J vor, so müssen die Komponenten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ganz in k sein.

Aus der Identität

$$Q_2^2 = \frac{2\gamma_0}{\mu} Q_2 - \frac{\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\mu^2}$$

und aus dem Umstande, daß Q_2^2 nur die Einheiten $1, i_1, i_2$ enthalten kann, also notwendig die Form

$$\varkappa_0 Q_0 + \varkappa_1 Q_1 + \varkappa_2 Q_2 = \varkappa_0 + \varkappa_1 i_1 + \varkappa_2 Q_2$$

haben muß, folgt durch Koeffizientenvergleichung, daß

$$\varkappa_0 = -\frac{\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\mu^2}, \qquad \varkappa_1 = 0, \qquad \varkappa_2 = \frac{2\gamma_0}{\mu},$$

daher auch $\varkappa_2' = \frac{\gamma_0}{\mu}$ ganze Größen aus k sein müssen. In J kommt also auch

$$Q_2 - \frac{\gamma_0}{\mu} Q_0 = \frac{\gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2}{\mu},$$

daher auch

$$i_1 \frac{\gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2}{\mu} = \frac{-\gamma_1 + \gamma_2 i_3}{\mu}$$

vor. Auf Grund des Hilfssatzes sind daher auch $\frac{\gamma_1}{\mu}$ und $\frac{\gamma_2}{\mu}$ ganz in k. Wir können daher setzen

$$Q_2 = \varkappa_0 + \varkappa_1 i_1 + \varkappa_2 i_2 ,$$

wo die $\varkappa_0$ ganz in k und insbesondere $|\varkappa_2| \leqq 1$ sein muß. Es kann daher $\varkappa_2 = 1$ genommen und wieder Q_2 durch $Q_2 - \varkappa_0 Q_0 - \varkappa_1 Q_1$ ersetzt werden, ohne den Modul zu ändern, so daß schließlich

$$Q_2 = i_2 \tag{26c}$$

gewählt werden kann.

Was nun noch Q_3 anbetrifft, so muß mit Q_3 auch

$$-i_1 Q_3 i_1 + Q_3 = \frac{2\delta_0 + 2\delta_1 i_1}{\mu}$$

im Teilring J vorkommen. Es werden daher $\frac{\delta_0}{\mu}$ und $\frac{\delta_1}{\mu}$ ganz in k. Ganz analog ergibt sich, daß auch $\frac{\delta_2}{\mu}$ und $\frac{\delta_3}{\mu}$ ganz in k sein müssen, so daß

$$Q_3 = \varkappa_0 + \varkappa_1 i_1 + \varkappa_2 i_2 + \varkappa_3 i_3$$

gesetzt werden kann. Wegen $|\varkappa_3| \leqq 1$ kann wieder $\varkappa_3 = 1$ und statt Q_3 $Q_3 - \varkappa_0 Q_0 - \varkappa_1 Q_1 - \varkappa_2 Q_2$ gewählt werden, ohne den Modul zu ändern, d. h. aber, daß

$$Q_3 = i_3 \tag{26d}$$

gewählt werden kann, w. z. b. w.

Durch Satz 4 werden wir veranlaßt zu der Definition:

Definition 3. Ein Quaternion soll *ganz* heißen, wenn es dem Teilring J angehört, wenn also alle seine Komponenten ganze Größen aus k sind.

Für die Charakteristik 2 sind damit die ganzen Quaternionen definitionsweise ohne die Begründung durch Satz 4 geschaffen worden.

Durch Heranziehung der π-adik in k läßt sich dem Begriff des ganzen Quaternions noch eine neue Seite abgewinnen.

Bekanntlich heißt jede π-adische Größe

$$\alpha_n \pi^n + \alpha_{n+1} \pi^{n+1} + \cdots$$

π-adisch ganz, wenn die Ordnungszahl $n \geqq 0$ ausfällt. Dies gibt Veranlassung zu der folgenden Verallgemeinerung der Definition 3 auf die π-adischen Quaternionen, d. h. diejenigen Quaternionen, deren Komponenten π-adische Größen aus k sind.

Definition 3*. Ein π-adisches Quaternion soll *π-adisch ganz* heißen, wenn es lauter π-adisch ganze Komponenten besitzt.

Jedes ganze π-adische Quaternion hat also die Form

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3,$$

wo jetzt die α_i die Gestalt

$$\alpha_i = \alpha_{i,n_i} \pi^{n_i} + \alpha_{i,n_i+1} \pi^{n_i+1} + \cdots \qquad (n_i \geqq 0)$$

haben; wird für den Augenblick

$$k = \mathrm{Min}(n_0, n_1, n_2, n_3)$$

gesetzt, so sind offenbar alle Komponenten α_i durch π^k π-adisch teilbar. π^k möge in diesem Falle der *Teiler* des π-adischen Quaternions genannt werden. Mit den π-adischen Quaternionen rechnet sich sonst formal genau so, wie mit den gewöhnlichen Quaternionen. Insbesondere gibt es also *reguläre* π-adische Quaternionen und *π-adische Nullteiler*.

§ 3.

Die Theorie der Teilbarkeit im Teilring der ganzen Quaternionen.

a)

Definition 4. Das ganze Quaternion A heißt durch das ganze reguläre Quaternion B rechts- bzw. linksseitig teilbar, wenn die Gleichungen

$$A = C\,B \quad \text{bzw.} \quad A = B\,C$$

durch ein passend gewähltes ganzes Quaternion C befriedigt werden können.

Mit anderen Worten: es muß $A\,B^{-1}$ bzw. $B^{-1}A$ ein ganzes Quaternion sein.

Satz 5. *Das ganze Quaternion A ist durch das ganze (reguläre) Quaternion B linksseitig teilbar oder nicht, je nachdem das zu A konjugierte Quaternion A' durch das zu B konjugierte Quaternion B' rechtsseitig teilbar ist oder nicht.*

Der Satz folgt sofort daraus, daß die Gleichungen

$$A = B\,C \quad \text{und} \quad A' = C'B'$$

stets gleichzeitig stattfinden.

Satz 5 führt die linksseitige Teilbarkeit zurück auf die rechtsseitige, so daß fast alle Sätze, die für die linksseitige Teilbarkeit gelten, auch für die rechtsseitige übertragen werden können.

Definition 5. Ein ganzes reguläres Quaternion E, dessen Inverses E^{-1} auch ganz ist, heißt eine „Einheit“.

Nach dieser Definition wird offenbar jedes Quaternion durch eine Einheit teilbar. Wir finden die sämtlichen Einheiten sofort nach Satz 1. Da nämlich E auch im Quaternion 1 aufgehen muß, muß $n(E)$ in $n(1)=1$ aufgehen, d. h. es muß $n(E)=a$ sein, wo a irgendeine Einheit aus k, d. h. ein Element $\neq 0$ aus $\mathfrak{P}$ bedeutet. Dies gibt

Satz 6. *Alle und nur diejenigen Quaternionen E, deren Norm $n(E)=a$ ist, wo a eine Einheit aus k, sind Einheiten.*

Satz 7. *Ist A irgendein ganzes Quaternion und μ eine ganze Größe $\neq 0$ aus k, so läßt sich das ganze Quaternion Q immer so bestimmen, daß der absolute Betrag der Norm von $A-Q\mu$ kleiner als $|\mu|^2$ wird.*

Zum Beweise werde

$$A=\alpha_0+\alpha_1 i_1+\alpha_2 i_2+\alpha_3 i_3, \qquad Q=\varkappa_0+\varkappa_1 i_1+\varkappa_2 i_2+\varkappa_3 i_3$$

gesetzt, so daß wird

$$A-Q\mu=(\alpha_0-\varkappa_0\mu)+(\alpha_1-\varkappa_1\mu)i_1+(\alpha_2-\varkappa_2\mu)i_2+(\alpha_3-\varkappa_3\mu)i_3 .$$

Nun kann bekanntlich $\varkappa_i$ in k so gewählt werden, daß der Grad von $\alpha_i-\varkappa_i\mu$ kleiner wird als der Grad von μ, oder $|\alpha_i-\varkappa_i\mu|<|\mu|$. Dann ergibt sich der behauptete Satz sofort aus $n(A-Q\mu)=\sum_i(\alpha_i-\varkappa_i\mu)^2$ und der aus Gradbetrachtungen sofort folgenden Betragsungleichung

$$|\alpha+\beta+\gamma+\ldots|<|\varkappa|, \quad \text{wenn} \quad |\alpha|<|\varkappa|, \quad |\beta|<|\varkappa|, \quad |\gamma|<|\varkappa|, \ldots .$$

Aus Satz 7 folgt nun leicht der für die Teilbarkeitstheorie im Quaternionenringe grundlegende

Satz 8. *Sind A und B zwei ganze Quaternionen, wobei B als reguläres Quaternion vorausgesetzt ist, so lassen sich die ganzen Quaternionen Q, C bzw. Q_1, C_1 so bestimmen, daß*

$$(27) \qquad \begin{cases} A=QB+C \quad bzw. \quad A=BQ_1+C_1, \\ |n(C)|<|n(B)| \quad " \quad |n(C_1)|<|n(B)| \end{cases}$$

wird.

Zum Beweise setzen wir

$$G=AB', \qquad \mu=n(B)=BB'$$

und substituieren G und μ für das A und μ von Satz 7. Dann existiert nach demselben ein ganzes Quaternion Q, so daß

$$G-Q\mu=(A-QB)B'$$

und

$$|n(G-Q\mu)|=|n(A-QB)|\cdot|n(B')|<|\mu|^2=|n(B)|\cdot|n(B')|,$$

also nach Division durch $|n(B')|=|\mu|$

$$|n(A-QB)|<|n(B)|$$

wird. Setzen wir also noch $A - QB = C$, so folgt:

$$|n(C)| < |n(B)|.$$

Analoges wird für die zweite Gleichung (27) bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 8 läßt sich nun ein links- bzw. rechtsseitiger Euklidischer Divisionsalgorithmus aufbauen. Sind also A und B wieder zwei Quaternionen von Satz 8, so läßt sich auf Grund desselben eine Kette von Gleichungen aufstellen der folgenden Art:

$$\begin{array}{ll} A = QB + C_1 & |n(C_1)| < |n(B)| \\ B = Q_1 C_1 + C_2 & |n(C_2)| < |n(C_1)| \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_{n-2} = Q_{n-1} C_{n-1} + C_n & 0 < |n(C_n)| < |n(C_{n-1})| \\ C_{n-1} = Q_n C_n + C_{n+1} & n(C_{n+1}) = 0. \end{array} \tag{28}$$

Auf etwa weitere Gleichungen kann nach Satz 8 nicht mehr geschlossen werden, da C_{n+1} nach Voraussetzung ein Quaternion mit der Norm 0 ist, was nach endlich vielen Schritten eintreten muß.

Es sind nun zwei wesentlich voneinander verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. $C_{n+1} = 0$. Der Algorithmus bricht mit einem regulären Quaternion C_n ab. Dieses C_n spielt ganz die Rolle des gr. gem. (rechtsseitigen) Teilers von A und B und läßt sich nach bekannten Schlüssen in der Form

$$GA + HB = C_n \tag{29}$$

darstellen, wo G und H zwei durch den Algorithmus (28) bestimmte ganze Quaternionen sind. Dieser Fall tritt sicher immer dann ein, wenn A und B ganze Größen aus k sind und wenn C_n ein Einheitsquaternion ist.

2. C_{n+1} ist Nullteilerquaternion. Die vorige Schlußweise versagt jetzt. Gewiß ist jeder gemeinsame rechtsseitige Teiler von A und B auch noch solcher von C_n, aber das umgekehrte kann nicht mehr geschlossen werden. C_n, das letzte reguläre Restquaternion, enthält in sich sämtliche gemeinsamen Teiler von A und B. Eine Definition des größten gemeinsamen Teilers läßt sich in diesem Falle aber nicht geben.

Eine weitere Beleuchtung erfahren diese Verhältnisse durch Heranziehung des Begriffs: Quaternionenideal.

Definition 6. Ein System von ganzen Quaternionen, das nicht aus lauter Nullteilern besteht, heiße ein rechts- bzw. linksseitiges Ideal[7]), wenn

[7]) Sind $A, B, \ldots$ erzeugende Quaternionen des Ideals, so werden wir das rechts- bzw. linksseitige Ideal bezeichnen durch $[A, B, \ldots]$ bzw. $(A, B, \ldots]$. Sind insbesondere alle $A, B, \ldots$ mit allen ganzen Quaternionen vertauschbar, so haben wir ein zweiseitiges Ideal $(A, B, \ldots)$, insbesondere immer, wenn $p = 2$ ist.

mit A und B auch $GA + HB$ bzw. $AG + BH$ im System vorhanden sind, unter G und H beliebige ganze Quaternionen verstanden.

Als besonders interessant verdient der Fall hervorgehoben zu werden, daß für $p = 2$ die Nullteiler des Quaternionenringes ein Ideal bilden, und zwar sind sie hier identisch mit allen Quaternionen $A = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$, deren Komponenten α_0, α_1, α_2, α_3 die lineare Mannigfaltigkeit

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

bilden. Denn es gilt

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Da ferner

$$A' = \alpha_0 - \alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2 - \alpha_3 i_3 = A = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$$

wird, ist das Quadrat jedes Nullteilers gleich 0, denn es ist

$$n(A) = A A' = A^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$$

für jeden Nullteiler A.

Allgemein gilt der

Satz 9. *Ist D ein reguläres Quaternion eines Ideals, dessen Norm kleinstmöglichen absoluten Betrag hat, so läßt sich jedes Quaternion A des Ideals darstellen in der Form*

$$A = QD + N \quad \text{bzw.} \quad A = D Q_1 + N_1, \tag{30}$$

wo Q bzw. Q_1 ganze Quaternionen, N bzw. N_1 Null oder ein zum Ideal gehöriges Nullteilerquaternion bedeuten, und zwar gilt die erste oder die zweite Darstellung, je nachdem das Ideal ein rechts- bzw. linksseitiges ist.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort aus Satz 8 und der an D geknüpften Minimalbedingung.

Betrachten wir insbesondere zweigliedrige Ideale $[A, B)$, wo wenigstens eins der A, B regulär ist, also alle Quaternionen $XA + YB$ mit beliebigen ganzen Quaternionen X, Y, und ist D das Quaternion von Satz 9 in $[A, B)$, so gilt nach Satz 9

$$A = A_1 D + M, \qquad B = B_1 D + N, \tag{31}$$

wo M, N gleich 0 oder Nullteiler sind. Ist insbesondere $M = N = 0$, so folgt, daß alle Quaternionen von $[A, B)$ rechtsseitig durch D teilbar sind, und da D selbst als Quaternion von $[A, B)$ in der Form

$$X_0 A + Y_0 B = D \tag{32}$$

darstellbar sein muß, sind auch umgekehrt alle Vielfachen von D Quaternionen von $[A, B)$, so daß $[A, B)$ gleich dem Hauptideal $[D)$ wird. Die Eigenschaft $M = N = 0$ ist dann aber invariant gegenüber der Wahl von D. Denn ist D_1 ein zweites Quaternion kleinsten absoluten Betrages von

$[A, B)$, so muß

$$D_1 = Q_1 D, \quad Q_1 \text{ Einheit}$$

also

$$D = Q_1^{-1} D_1$$

gelten. Dann folgt aber

$$A = (A_1 Q_1^{-1}) D_1, \quad B = (B_1 Q_1^{-1}) D_1,$$

d. h. $M_1 = N_1 = 0$, w. z. b. w.

Das Quaternion D hat alle Eigenschaften des größten gemeinsamen (rechtsseitigen) Teilers von A und B, muß demnach mit dem Quaternion C_n des Euklidischen Algorithmus (S. 247) bis auf Einheiten übereinstimmen, falls Fall 1 vorliegt. Die Betrachtung des Ideals $[A, B)$ hat aber schon insofern weiter geführt, als die Unsymmetrie, die der Algorithmus (28) bezüglich A und B aufweist, hier vermieden ist. Da dieser Fall zur Aufstellung einer Teilbarkeitstheorie der ganzen Quaternionen besonders günstig liegt, definieren wir:

Definition 7. Zwei ganze Quaternionen A und B, von denen mindestens eins regulär ist, heißen *relativ rechtsseitig zueinander regulär*, wenn in den aus dem Ideal $[A, B)$ folgenden Gleichungen (31) $M - N = 0$ wird. Das Quaternion D kleinsten absoluten Betrages von $[A, B)$, das bis auf Einheiten eindeutig bestimmt ist, heißt der größte gemeinsame (rechtsseitige) Teiler von A und B. Ist D insbesondere Einheit, so heißen A und B teilerfremd.

Diese Betrachtungen lassen sich offenbar sofort auf die linksseitige Teilbarkeit übertragen.

Sind A und B relativ rechtsseitig regulär und teilerfremd, so lassen sich nach (32) zwei ganze Quaternionen G und H so bestimmen, daß wird:

$$GA + HB = 1. \tag{33}$$

Haben die ganzen regulären Quaternionen einen von Einheiten verschiedenen gemeinsamen (rechts- oder linksseitigen) Teiler D, so ist klar, daß auch $n(A)$ und $n(B)$ einen von Einheiten verschiedenen gemeinsamen Teiler, nämlich $n(D)$ besitzen. Die Umkehrung kann jedoch nur unter besonderen Voraussetzungen geschlossen werden. Wir beweisen darüber den

Satz 10. *Sind A und B zwei ganze reguläre Quaternionen, $B = \beta$ eine ganze Größe aus k, A relativ rechts- bzw. linksseitig regulär zu B, so haben A und B dann und nur dann einen von Einheiten verschiedenen rechts- oder linksseitigen gemeinsamen Teiler, wenn ihre Normen einen von Einheiten verschiedenen gemeinsamen Teiler haben.*

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß $n(A)$ und $n(B)$ sicher teilerfremd sind, wenn A und B teilerfremd sind. Wir legen rechtsseitige Teil-

barkeit zugrunde, da sich für linksseitige alles analog gestaltet. Da A relativ regulär zu $B = \beta$ und teilerfremd zu β vorausgesetzt wird, lassen sich nach (33) die ganzen Quaternionen G und H so bestimmen, daß wird:

$$GA + HB = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir:

$$n(GA) = n(1 - HB) = (1 - H\beta)(1 - H'\beta),$$
$$n(G)n(A) = 1 - H\beta - H'\beta + n(H)\beta^2.$$

Aus dieser Gleichung ist zunächst zu ersehen, daß G regulär sein muß. Denn wäre $n(G) = 0$, so würde die rechte Seite, in der nur Größen aus k auftreten, einen Widerspruch ergeben, wofern wir nicht β als Einheit in k annehmen wollen, was wir aber natürlich ausschließen. Ähnlich liegt es in dem Falle, wo alle Glieder mit β auf der rechten Seite verschwinden bzw. sich wegheben. Dann müßten A und G Einheitsquaternionen werden. Schließen wir diese beiden trivialen Fälle aus und nehmen wir an, $n(A)$ und $n(B) = \beta^2$ hätten einen von Einheiten verschiedenen gemeinsamen Teiler, also auch $n(A)$ und β, so müßte dieser nach der letzten Gleichung auch in 1 aufgehen, worin ein Widerspruch liegt. $n(A)$ und $n(B)$ sind also notwendig teilerfremd, w. z. b. w.

b)

Dem durch Definition 3* eingeführten ganzen π-adischen Quaternion entsprechend kann eine ähnliche Teilbarkeitstheorie im Teilring J_π der ganzen π-adischen Quaternionen eingeführt werden.

Definition 4, 5 und Satz 5 übertragen sich ohne weiteres auf J_π.

Satz 6*. *Alle und nur diejenigen Quaternionen E von J_π, deren Norm $n(E) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi^2 + \cdots$ mit $\varepsilon_0 \not\equiv 0 \bmod \pi$, also eine π-adische Einheit in k_π ist, sind Einheiten in J_π.*

Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der von Satz 6.

Wir werden die Komponenten unserer π-adischen Quaternionen in Zukunft immer in der normierten Form

$$\alpha_\pi = \alpha_n\pi^n + \alpha_{n+1}\pi^{n+1} + \cdots$$

annehmen, wo die $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$ Repräsentanten eines vollständigen Restklassensystems $\bmod \pi$ von der Art sind, daß $|\alpha_n| < |\pi|$, $|\alpha_{n+1}| < |\pi|, \ldots$ wird. Wir beweisen dann den

Satz 7*. *Ist A irgendein ganzes π-adisches Quaternion und μ irgendeine ganze π-adische Größe aus k_π, so läßt sich das ganze π-adische Quaternion Q immer so bestimmen, daß die Ordnungszahl der Norm von $A - Q\mu$ kleiner wird als die Ordnungszahl von $n(\mu)$.*

Zum Beweise werde gesetzt

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3, \qquad Q = \varkappa_0 + \varkappa_1 i_1 + \varkappa_2 i_2 + \varkappa_3 i_3,$$

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\pi + \alpha_{i2}\pi^2 + \cdots, \qquad \varkappa_i = \varkappa_{i0} + \varkappa_{i1}\pi + \varkappa_{i2}\pi^2 + \cdots$$

$$(i = 0, 1, 2, 3),$$

$$\mu = \mu_m \pi^m + \mu_{m+1}\pi^{m+1} + \cdots \qquad (\mu_m \neq 0).$$

Dann können wir

$$A = R + \pi^m \bar{A}, \qquad \bar{A} = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 i_1 + \bar{\alpha}_2 i_2 + \bar{\alpha}_3 i_3,$$

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_{i,m} + \alpha_{i,m+1}\pi + \cdots, \qquad R = \varrho_0 + \varrho_1 i_1 + \varrho_2 i_2 + \varrho_3 i_3,$$

$$\varrho_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\pi + \cdots + \alpha_{i,m-1}\pi^{m-1} \qquad (|\alpha_{ik}| < |\pi|)$$

setzen. Es wird dann $\pi^m \bar{A}$ durch μ teilbar:

$$\pi^m \bar{A} = Q\mu,$$

da $\varkappa_i$ π-adisch ganz aus der Gleichung

$$\bar{\alpha}_i = \varkappa_i(\mu_m + \mu_{m+1}\pi + \cdots)$$

bestimmt werden kann. R ist nun so gewählt, daß

$$A - Q\mu = R$$

gilt. Betrachten wir nun

$$n(R) = \varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2.$$

$n(R)$ wird eine endliche π-adische Reihe, die nach der Bedeutung der ϱ_i in der nichtreduzierten Gestalt in der Form

$$n(R) = \sigma_0 + \sigma_1\pi + \cdots + \sigma_{2m-2}\pi^{2m-2}$$

geschrieben werden kann. Hierbei sind die σ_l Summen von Produkten von je zweien der α_{ik}, es gilt demnach jedenfalls

$$|\sigma_l| < |\pi|^2.$$

Verwandelt man daher $n(R)$ in die reduzierte Form, so überlegt man sich leicht, daß die Ordnungszahl von $n(R)$ höchstens gleich $2m-1$ werden kann. Da aber die Ordnungszahl von $n(\mu) = \mu^2 = \mu_m^2\pi^{2m} + \cdots$ gleich $2m$ ist, folgt daraus die Behauptung des Satzes.

Nunmehr folgt ganz analog zu Satz 8 der

Satz 8*. *Sind A und B zwei ganze π-adische Quaternionen, wobei B als reguläres π-adisches Quaternion vorausgesetzt ist, so lassen sich die ganzen π-adischen Quaternionen Q, C bzw. Q_1, C_1 so bestimmen, daß*

(27*) $$A = QB + C \quad \text{bzw.} \quad A = BQ_1 + C_1$$

und die Ordnungszahl von $n(C)$ bzw. $n(C_1)$ kleiner wird als die Ordnungszahl von $n(B)$.

Der Beweis kann mit denselben Bezeichnungen geführt werden wie in Satz 8. Wir wollen im folgenden durch $\|\alpha\|$ die Ordnungszahl einer Größe aus k_π bezeichnen. Es gilt dann offenbar die Beziehung

$$\|\alpha\beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|. \tag{34}$$

Daher folgt

$$G - Q\mu = (A - QB)B',$$
$$\|n(G - Q\mu)\| = \|n(A - QB)\| + \|n(B') < |\mu^2\| = \|n(B)\| + \|n(B')\|$$
$$\|n(A - QB)\| = \|n(C)\| < \|n(B)\|$$

nach Satz 7*.

Satz 8* hat zur Folge, daß ganz analog zu (28) ein Euklidischer Algorithmus aufstellbar wird, wo nur statt „absoluter Betrag" „Ordnungszahl" einzusetzen ist. Dabei sind wieder die beiden typischen Fälle 1. und 2. zu unterscheiden. Die Definition 6 eines Ideals überträgt sich sofort und zieht Satz 9 nach sich, wo jetzt D aber ein Quaternion des Ideals bezeichnet, dessen Norm die kleinste Ordnungszahl hat. Damit ist dann die Möglichkeit gegeben, die relative Regularität durch eine der Definition 7 entsprechende Definition einzuführen, wonach sich dann zeigt, daß auch Satz 10 sinngemäß übertragbar wird.

§ 4.

Kongruenzen im Teilring der ganzen Quaternionen.

Definition 8. Zwei ganze Quaternionen A und B heißen kongruent nach dem Quaternion M als Modul, in Zeichen

$$A \equiv B \bmod M,$$

wenn ihre Differenz $A - B$ durch M teilbar ist.

Uns soll im folgenden jedoch nicht dieser allgemeine Fall beschäftigen, sondern nur der Spezialfall, wo $M = \mu$ eine ganze Größe aus k ist. Es gilt hierbei, wie sofort einzusehen ist, der

Satz 11. *Jedes ganze Quaternion ist* $\bmod \mu$ *einem und nur einem der* $|\mu|^4$ *Quaternionen*

$$R = \varrho_0 + \varrho_1 i_1 + \varrho_2 i_2 + \varrho_3 i_3 \qquad (|\varrho_i| < |\mu|) \tag{35}$$

kongruent.

M. a. W., diese $|\mu|^4$ Quaternionen R bilden ein vollständiges Restsystem $\bmod \mu$.

Es gelingt nun die Zuordnung von Substitutionen zu den einzelnen Quaternionen in analoger Weise, wie es in H. S. 40—43 für die Hamiltonschen Quaternionen durchgeführt ist.

Wir ziehen also die $\bmod \mu$ ganzzahligen binären Substitutionen

$$(36) \qquad \left.\begin{aligned} x_1' &\equiv \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2' &\equiv \gamma x_1 + \delta x_2 \end{aligned}\right\} \bmod \mu, \quad \text{kurz } S = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$$

heran, wobei zwei Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}, \bar{\beta} \\ \bar{\gamma}, \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

als nicht verschieden anzusehen sind, wenn die Kongruenzen

$$\alpha \equiv \bar{\alpha}, \quad \beta \equiv \bar{\beta}, \quad \gamma \equiv \bar{\gamma}, \quad \delta \equiv \bar{\delta} \bmod \mu$$

erfüllt sind. Die Anzahl der verschiedenen dieser Substitutionen ist offenbar auch gleich $|\mu|^4$. Mit diesen Substitutionssymbolen werden zwei Rechnungsoperationen, die Addition und die Multiplikation, durch die beiden folgenden Gleichungen definiert:

$$(37) \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\alpha}, \bar{\beta} \\ \bar{\gamma}, \bar{\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta} \\ \gamma + \bar{\gamma}, \delta + \bar{\delta} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}, \bar{\beta} \\ \bar{\gamma}, \bar{\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma}, \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma}, \gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach diesen Festsetzungen beweisen wir den folgenden grundlegenden *Zuordnungssatz*:

Satz 12. *Die $|\mu|^4$ Substitutionen S lassen sich den $|\mu|^4$ Quaternionen R, wenn p ungerade, umkehrbar eindeutig, — wenn $p = 2$, nur eindeutig*[8]*), — so zuordnen, daß für irgendzwei einander zugeordnete R und S die Kongruenz*

$$(38) \qquad n(R) \equiv \alpha\delta - \beta\gamma \bmod \mu$$

gilt und daß ferner, wenn R und S sowie R_1 und S_1 einander zugeordnet sind, dem Quaternion $R + R_1$ die Substitution $S + \bar{S}$ und dem Quaternion $R\bar{R}$ die Substitution $S\bar{S}$ zugeordnet ist, so daß die Quaternionen R isomorph auf die Substitutionen S bezogen werden können.

Dabei sind natürlich $R + \bar{R}$, $R\bar{R}$, $S + \bar{S}$, $S\bar{S} \bmod \mu$ zu betrachten. Zum Beweise des Zuordnungssatzes leiten wir zuerst ab den

Hilfssatz. Die ganzen Größen ϱ und σ aus k lassen sich so bestimmen, daß die Kongruenz

$$(39) \qquad 1 + \varrho^2 + \sigma^2 \equiv 0 \bmod \mu$$

erfüllt ist.

[8]) Wir beschränken uns jetzt deshalb auf *ungerade* Charakteristik p.

Der Hilfssatz braucht nur für den Fall bewiesen zu werden, wo $\mu = \pi$ ein Primelement von k ist. Ganz ähnlich wie in der rationalen Zahlentheorie beweist man dann die Existenz zweier solcher Größen ϱ und σ zunächst für eine Primelementpotenz, dann für einen beliebigen Modul μ. Es mögen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\frac{|\pi|-1}{2}}$ die sämtlichen quadratischen Reste $\bmod \pi$ bedeuten. Setzt man dann in den Ausdruck $1 + \bar{\varrho}$ für $\bar{\varrho}$ sukzessive $0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{\frac{|\pi|-1}{2}}$ ein, so erhält man im ganzen $\frac{|\pi|+1}{2} \bmod \pi$ verschiedene Größen aus k. Setzt man weiter in $-\bar{\sigma}$ für $\bar{\sigma}$ nacheinander $0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{\frac{|\pi|-1}{2}}$ ein, so erhält man wieder $\frac{|\pi|+1}{2} \bmod \pi$ verschiedene Größen aus k. Unter den Größen $1 + \bar{\varrho}$ muß daher notwendig mindestens eine vorhanden sein, die einer Größe $-\bar{\sigma} \bmod \pi$ kongruent wird, da nicht $\frac{|\pi|+1}{2} + \frac{|\pi|+1}{2} = |\pi| + 1 \bmod \pi$ verschiedene Größen existieren können. Da $\bar{\varrho} = \varrho^2$, $\bar{\sigma} = \sigma^2$ gesetzt werden kann, ist also eine Lösung der Kongruenz

$$1 + \varrho^2 \equiv -\sigma^2 \quad \text{oder} \quad 1 + \varrho^2 + \sigma^2 \equiv 0 \bmod \pi$$

wirklich vorhanden, w. z. b. w.

Von hier ab verläuft der Beweis formal genau so wie bei H., S. 42—43, so daß wir ihn übergehen können.

Besitzen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mit dem Modul μ keinen allen fünf Größen gemeinsamen Teiler, so können auf Grund des Beweises von Satz 12 auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit μ keinen gemeinsamen Teiler besitzen und umgekehrt. Nennen wir daher ein Quaternion $R = \varrho_0 + \varrho_1 i_1 + \varrho_2 i_2 + \varrho_3 i_3$ primitiv $\bmod \mu$, wenn $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mit μ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, entsprechend $S = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ primitiv $\bmod \mu$, so ist bewiesen der

Zusatz zu Satz 12. Einem $\bmod \mu$ primitiven Quaternion ist eine $\bmod \mu$ primitive Substitution zugeordnet und umgekehrt.

Satz 13. *Die Anzahl der* $\bmod \mu$ *inkongruenten Quaternionen* R, *die* $\bmod \mu$ *primitiv sind und der Bedingung*

$$n(R) \equiv 0 \bmod \mu \tag{40}$$

genügen, ist

$$|\mu|^3 \prod_{\pi} \left(1 - \frac{1}{|\pi|^2}\right)\left(1 + \frac{1}{|\pi|}\right), \tag{41}$$

wo das Produkt über alle verschiedenen, in μ *aufgehenden Primfaktoren zu erstrecken ist.*

Bezeichnen wir die gesuchte Anzahl für den Augenblick mit $\psi(\mu)$, so beweist man ebenso wie bei H. S. 43 die Gültigkeit von

$$\psi(\mu) = \psi(\mu_1)\,\psi(\mu_2), \tag{42}$$

wenn $\mu = \mu_1 \mu_2$ und μ_1 und μ_2 zueinander teilerfremd sind. Demzufolge wird:

$$\psi(\mu) = \Pi \psi(\pi^k), \tag{42a}$$

wo das Produkt über alle Primelementpotenzen π^k von μ zu nehmen ist. Es gilt aber weiter

$$\psi(\pi^{k+1}) = |\pi|^3 \cdot \psi(\pi^k). \tag{43}$$

Infolge des Zuordnungssatzes bedeutet nämlich $\psi(\pi^k)$ die Anzahl der „primitiven“ Lösungen der Kongruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \bmod \pi^k. \tag{44}$$

Ist nun $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ eine dieser Lösungen, so werden

$$\alpha = \alpha_0 + \pi^k \bar{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \pi^k \bar{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 + \pi^k \bar{\gamma}, \quad \delta = \delta_0 + \pi^k \bar{\delta}$$

der Kongruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \bmod \pi^{k+1} \tag{45}$$

genügen, wenn

$$\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0 + \pi^k(\alpha_0\bar{\delta} + \delta_0\bar{\alpha} - \beta_0\bar{\gamma} - \gamma_0\bar{\beta}) \equiv 0 \bmod \pi^{k+1}$$

oder

$$\frac{\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0}{\pi^k} + \alpha_0\bar{\delta} + \delta_0\bar{\alpha} - \beta_0\bar{\gamma} - \gamma_0\bar{\beta} \equiv 0 \bmod \pi$$

ist. Da mindestens eine der Größen $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, etwa α_0, nicht durch π teilbar ist, können wir $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ beliebig wählen, worauf $\bar{\delta}$ aus der letzten Kongruenz sich eindeutig bestimmen läßt. Folglich resultieren aus jeder Lösung von (44) $|\pi|^3$ Lösungen von (45), w. z. b. w.

Wiederholte Anwendung von (43) ergibt schließlich

$$\psi(\pi^k) = |\pi|^{3(k-1)}\,\psi(\pi). \tag{43a}$$

Die $\psi(\pi)$ primitiven Lösungen von

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \bmod \pi \tag{44a}$$

können wir nun in $|\pi|$ Gruppen zerlegen. Bedeutet nämlich $0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{\pi-1}$ ein vollständiges Restsystem $\bmod \pi$, so werfen wir eine Lösung in die 1., 2., …, $|\pi|$-te Gruppe, je nachdem

$$\alpha\delta \equiv \beta\gamma \equiv \varrho_1, \ \ldots, \ \alpha\delta \equiv \beta\gamma \equiv \varrho_{|\pi|-1}, \quad \alpha\delta \equiv \beta\gamma \equiv 0 \bmod \pi$$

wird. Jede der ersten $|\pi| - 1$ Gruppen hat $(|\pi| - 1)^2$ Lösungen, die letzte

Gruppe aber $(2|\pi|-1)^2-1=4|\pi|^2-4|\pi|$ Lösungen, da die Lösung $\alpha\equiv\beta\equiv\gamma\equiv\delta\equiv 0 \bmod\pi$ auszuschließen ist. Es wird also

$$\psi(\pi)=(|\pi|-1)^3+4|\pi|^2-4|\pi|=(|\pi|^2-1)(|\pi|+1),$$

$$\psi(\pi^k)=|\pi|^{3k}\left(1-\frac{1}{|\pi|^2}\right)\left(1+\frac{1}{\pi}\right), \tag{46}$$

$$\psi(\mu)=|\mu|^3\prod_{\pi}\left(1-\frac{1}{|\pi|^2}\right)\left(1+\frac{1}{\pi}\right),$$

w. z. b. w.

In ähnlicher Weise können wir die Anzahl derjenigen Quaternionen R bestimmen, deren Norm der Bedingung $n(R)\equiv 1 \bmod\mu$ genügt.

Satz 14. *Die Anzahl der* $\bmod\mu$ *inkongruenten ganzen Quaternionen, deren Norm kongruent* $1 \bmod\mu$ *ist, beträgt*

$$|\mu|^3\prod_{\pi}\left(1-\frac{1}{|\pi|^2}\right), \tag{47}$$

wo das Produkt über die verschiedenen Primteiler von μ zu erstrecken ist.

Nach dem Zuordnungssatz ist nämlich diese Anzahl, die wir mit $\chi(\mu)$ bezeichnen wollen, ebenso groß wie die der Lösungen der Kongruenz:

$$\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1 \bmod\mu. \tag{48}$$

Genau wie beim Beweise des vorigen Satzes ergeben sich wieder die Rekursionsformeln

$$\chi(\mu)=\prod\chi(\pi^k),$$
$$\chi(\pi^k)=|\pi|^{3(k-1)}\chi(\pi). \tag{49}$$

Um $\chi(\pi)$ zu bestimmen, zerlegen wir die $\chi(\pi)$ Lösungen der Kongruenz (48) für $\mu=\pi$ wieder in $|\pi|$ Gruppen. Ist wieder $0,\varrho_1,\ldots,\varrho_{|\pi|-1}$ ein vollständiges Restsystem $\bmod\pi$ und insbesondere $\varrho_{|\pi|-1}\equiv -1 \bmod\pi$, so werfen wir eine Lösung in die $1.,2.,\ldots,|\pi|$-te Gruppe, je nachdem α,β,δ die Kongruenzen

$$\left\{\begin{matrix}\beta\gamma\equiv\varrho_1\\ \alpha\delta\equiv\varrho_1+1\end{matrix}\right\},\ldots,\left\{\begin{matrix}\beta\gamma\equiv\varrho_{|\pi|-1}\equiv -1\\ \alpha\delta\equiv\varrho_{|\pi|-1}+1\equiv 0\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\beta\gamma\equiv 0\\ \alpha\delta\equiv 1\end{matrix}\right\}\bmod\pi \tag{50}$$

erfüllen. Jedes der ersten $|\pi|-2$ Kongruenzenpaare enthält aber $(|\pi|-1)^2$ Lösungen, jede der beiden letzten Gruppen aber $(|\pi|-1)(2|\pi|-1)$ Lösungen; daher wird

$$\chi(\pi)=(|\pi|-2)(|\pi|-1)^2+2(|\pi|-1)(2|\pi|-1)=|\pi|(|\pi|^2-1), \tag{51}$$

und aus (49) und (51) folgt dann die im Satz behauptete Anzahl, w. z. b. w.

Satz 15. *Es sei* π *ein Primelement in* k *und* Π *eines derjenigen* $(|\pi|^2-1)(|\pi|+1)$ *primitiven Quaternionen eines Restsystems* $\bmod\pi$, *welche der Bedingung* $n(\Pi)\equiv 0 \bmod\pi$ *genügen. Dann ist die Anzahl der*

mod π *inkongruenten Lösungen der Kongruenz*

$$X\Pi \equiv 0 \bmod \pi \tag{52}$$

gleich $|\pi|^2$.

Der Beweis greift wieder auf den Zuordnungssatz zurück. Ist nämlich $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ die dem Quaternion Π zugeordnete Substitution, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht sämtlich durch π teilbar und $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \bmod \pi$, die gesuchte Anzahl aber genau so groß wie die Anzahl der Substitutionen $\begin{pmatrix}x_1, x_2\\ x_3, x_4\end{pmatrix}$, deren Koeffizienten der Bedingung

$$\begin{pmatrix}x_1, x_2\\ x_3, x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv 0 \bmod \pi, \tag{53}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, den Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} x_1\alpha + x_2\gamma &\equiv 0\\ x_1\beta + x_2\delta &\equiv 0\end{aligned}\right\} \bmod \pi, \qquad \left.\begin{aligned} x_3\alpha + x_4\gamma &\equiv 0\\ x_3\beta + x_4\delta &\equiv 0\end{aligned}\right\} \bmod \pi \tag{53a}$$

genügen. Wir können etwa annehmen, daß $(\alpha, \pi) = 1$ ist und α_1 aus der Kongruenz $\alpha\alpha_1 \equiv 1 \bmod \pi$ bestimmen. Aus der ersten der beiden Kongruenzen für x_1 und x_2 folgt dann für x_1 der Wert

$$x_1 \equiv -x_2\alpha_1\gamma \bmod \pi, \tag{54}$$

während auf Grund der Umformung

$$\alpha(x_1\beta + x_2\delta) \equiv \beta(x_1\alpha + x_2\gamma) + (\alpha\delta - \beta\gamma)x_2 \bmod \pi \tag{54a}$$

dann die zweite Kongruenz von selbst erfüllt ist. Ganz Ähnliches gilt für die beiden letzten Kongruenzen. Es sind somit x_2 bzw. x_4 mod π beliebig wählbar, während danach x_1 bzw. x_3 mod π eindeutig bestimmt sind. Es ergeben sich daher genau $|\pi|^2$ inkongruente Wertsysteme x_1, x_2, x_3, x_4, w. z. b. w. Unter diesen Systemen ist natürlich auch das System $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv 0 \bmod \pi$ oder das Quaternion $X \equiv 0 \bmod \pi$ als Lösung mitgezählt.

§ 5.

Die Zerlegung der ganzen Quaternionen.

Jedes ganze Quaternion ist durch jedes Einheitsquaternion rechts- und linksseitig teilbar. Quaternionen, die sich multiplikativ nur um Einheitsquaternionen unterscheiden, werden sich daher in bezug auf Teilbarkeitsfragen gleichwertig verhalten.

Definition 9. Quaternionen, die sich multiplikativ nur um Einheitsquaternionen unterscheiden, sollen *assoziiert* heißen.

Alle durch ein Quaternion A teilbaren Quaternionen sind auch durch jedes zu A assoziierte Quaternion teilbar.

Definition 10. Ein Teiler B eines ganzen regulären Quaternions A soll *echter* Teiler von A heißen, wenn er von den Assoziierten von A und von Einheiten verschieden ist.

Nunmehr führen wir den dem Begriff der Primzahl der rationalen Zahlentheorie äquivalenten Begriff des Primquaternions ein durch die

Definition 11. Ein ganzes reguläres Quaternion, welches keine Einheit ist und keine echten Teiler besitzt, heißt ein Primquaternion.

Satz 16. *Ist die Norm eines ganzen Quaternions ein Primelement aus k, so ist das Quaternion ein Primquaternion.*

Denn aus jeder Zerlegung

$$\Pi = A\,B$$

eines Quaternions Π folgt nach Satz 1

$$n(\Pi) = n(A)\,n(B).$$

Ist demnach $n(\Pi) = \pi$ ein Primelement aus k, so muß $n(A)$ oder $n(B)$ eine Einheit in k, also entweder A oder B ein Einheitsquaternion sein, w. z. b. w.

Definition 9 bis 11 übertragen sich sofort auf die π-adischen ganzen Quaternionen. Satz 16 nimmt in J_π die Form an:

Satz 16*. *Ist die Norm eines ganzen π-adischen Quaternions von der Ordnungszahl* 1, *so ist das Quaternion ein π-adisches Primquaternion.*

Die Umkehrung von Satz 16 kann aber nur unter gewissen Voraussetzungen bewiesen werden. Wir benötigen dazu die

Definition 12. Das Restklassensystem (35) nach einer ganzen Größe μ aus k soll *in bezug auf μ rechts- bzw. linksseitig regulär* heißen, wenn unter den in der Anzahl (41) auftretenden mod μ primitiven Repräsentanten R mit der Eigenschaft $n(R) \equiv 0 \bmod \mu$ mindestens einer vorhanden ist, der relativ zu μ rechts- bzw. linksseitig regulär ist.[9])

Satz 17. *Ein Primelement π aus k, dessen Restklassensystem* (35) *rechts- bzw. linksseitig regulär in bezug auf π ist, kann, als Quaternion aufgefaßt, niemals ein Primquaternion sein.*

[9]) Aus Def. 12 folgt, daß *alle* Quaternionen der Restklassen mod μ, deren Repräsentant R mod μ primitiv, relativ zu μ rechts- bzw. linksseitig regulär ist und die Bedingung $n(R) \equiv 0 \bmod \mu$ erfüllt, *und nur sie* dieselben Bedingungen erfüllen. Denn zunächst sind mit R auch alle $\bar{R} = R + K\mu$ der Restklasse mod μ primitiv und erfüllen die Bedingung $n(\bar{R}) \equiv 0 \bmod \mu$. Ist nun irgendein Repräsentant R einer solchen Restklasse rechtsseitig zu μ regulär, so gelten nach Def. 7 zwei Gleichungen $R = R_1 D$ und $\mu = M D$, wo D das reguläre Quaternion kleinster absoluter Norm des Ideals $[R, \mu)$ von Satz 9 ist. Es sind aber auch alle übrigen Quaternionen $\bar{R} = R + K\mu$ der Restklasse von R im genannten Ideal enthalten und bestimmen genau dasselbe Ideal: $[R, \mu) = [\bar{R}, \mu)$. Daraus folgt aber auch $R = \bar{R}_1 D$, $\mu = M D$ für alle $\bar{R}$ der Restklasse R und damit die Behauptung nach Def. 7.

Denn nach Voraussetzung (Definition 12) existiert ein Quaternion $R = \varrho_0 + \varrho_1 i_1 + \varrho_2 i_2 + \varrho_3 i_3$, dessen Komponenten nicht sämtlich durch π teilbar sind, dessen Norm $n(R) \equiv 0 \bmod \pi$ ist, so, daß R und π relativ regulär werden. Wir wollen dabei rechtsseitige Teilbarkeit zugrunde legen.

Da $n(R)$ und $n(\pi) = \pi^2$ den gemeinsamen Teiler π haben, darf nach Satz 10 der größte gemeinsame rechtsseitige Teiler D von R und π keine Einheit sein. Setzen wir nun

$$\pi = D_1 D, \qquad R = D_2 D,$$

so kann auch D_1 keine Einheit sein, da sonst D mit π assoziiert wäre und dann π gegen die Voraussetzung in allen Komponenten von R aufgehen müßte. Aus der Gleichung

$$\pi = D_1 D$$

folgt demnach, daß π kein Primquaternion ist, da D echter Teiler von π ist.

Nunmehr können wir die Umkehrung von Satz 16 wie folgt beweisen:

Satz 18. *Ist Π irgendein Primquaternion und π ein Primteiler von $n(\Pi)$, ferner Π primitiv* mod π *und Π und π relativ rechts- oder linksseitig regulär, so ist*

$$n(\Pi) = \pi, \tag{56}$$

also die Norm des Primquaternions ein Primelement aus k.

Denn nach den Voraussetzungen des Satzes haben $n(\Pi)$ und $n(\pi) = \pi^2$ den gemeinsamen Teiler π, infolgedessen nach Satz 10 einen von Einheiten verschiedenen größten gemeinsamen Teiler D, da Π und π nach Voraussetzung relativ regulär sind. Da ferner Π ein Primquaternion, muß $D = E\Pi$ mit Π assoziiert, also π durch Π teilbar sein, etwa

$$\pi = \Pi_1 \Pi$$

im Falle rechtsseitiger Teilbarkeit. Durch Übergang zur Norm folgt daraus

$$\pi^2 = n(\Pi_1)\, n(\Pi). \tag{57}$$

Nun sind aber auch die Bedingungen von Satz 17 erfüllt. Denn Π ist primitiv mod π, $n(\Pi) \equiv 0 \bmod \pi$ und Π und π relativ regulär. Nach Definition 12 ist also das Restklassensystem mod π regulär in bezug auf π. Nach Satz 17 ist daher π, als Quaternion aufgefaßt, kein Primquaternion. Es kann daher Π_1 keine Einheit sein, da sonst $\pi = \Pi_1 \Pi$ mit Π assoziiert und doch Primquaternion wäre. Aus (56) folgt dann

$$n(\Pi) = \pi,$$

w. z. b. w. Aus $\pi = \Pi_1 \Pi$ folgt dann noch, daß $\Pi_1 = \Pi'$ das zu Π konjugierte Quaternion ist.

Leider zeigt die Heranziehung der π-adischen Quaternionen keinen Fortschritt gegenüber der entwickelten Theorie. Definition 12 und die Sätze 17 und 18 lassen sich sinngemäß auch auf den Bereich J_π der ganzen π-adischen Quaternionen übertragen.

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, Mittel und Wege zu suchen, die in einem Primelement π von k aufgehenden Primquaternionen Π von der Norm $n(\Pi) = \pi$ zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die nach Satz 13 in der Anzahl $(|\pi|^2 - 1)(|\pi| + 1)$ vorhandenen $\bmod \pi$ primitiven Quaternionen F eines vollständigen Restsystems $\bmod \pi$ mit der Eigenschaft $n(F) \equiv 0 \bmod \pi$. Diese Quaternionen F können wir außerdem so wählen, daß $n(F)$ durch π, aber nicht durch π^2 teilbar wird, gegebenenfalls durch Abänderungen der Komponenten von $F \bmod \pi$. Denn ist

$$F = \varphi_0 + \varphi_1 i_1 + \varphi_2 i_2 + \varphi_3 i_3$$

und ersetzen wir F durch das $\bmod \pi$ kongruente Quaternion

$$\overline{F} = \varphi_0 + \varphi_1 i_1 + \varphi_2 i_2 + \varphi_3 i_3 + \pi(\varkappa_0 + \varkappa_1 i_1 + \varkappa_2 i_2 + \varkappa_3 i_3),$$

so wird

$$\begin{aligned} n(\overline{F}) &= (\varphi_0 + \pi\varkappa_0)^2 + (\varphi_1 + \pi\varkappa_1)^2 + (\varphi_2 + \pi\varkappa_2)^2 + (\varphi_3 + \pi\varkappa_3)^2 \\ &\equiv n(F) + 2\pi(\varphi_0\varkappa_0 + \varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2 + \varphi_3\varkappa_3) \bmod \pi^2. \end{aligned}$$

Ist nun $n(F) \equiv 0 \bmod \pi^2$, so lassen sich doch die ganzen Größen $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ aus k so bestimmen, daß die Klammer $\sum \varphi_i \varkappa_i$ durch π nicht teilbar wird, weil nach Voraussetzung nicht sämtliche φ_i durch π teilbar sind. Dann ist aber $n(\overline{F})$ wie gewünscht durch π, aber nicht durch π^2 teilbar.

Machen wir nun die Voraussetzung, daß das Restklassensystem $\bmod \pi$ in bezug auf π regulär ist (Def. 12), und ist F ein $\bmod \pi$ primitives Quaternion, dessen Norm durch π teilbar ist, und so beschaffen, daß F und π relativ rechtsseitig regulär sind, so haben nach Satz 10 F und π einen größten rechtsseitigen gemeinsamen Teiler Π, der keine Einheit und bis auf Einheitsfaktoren eindeutig bestimmt ist. Ist etwa

$$F = A\Pi, \qquad \pi = \Pi'\Pi, \tag{58}$$

so muß Π nach Satz 16 Primquaternion von der Norm π sein, da es nicht mit π assoziiert sein kann, weil sonst π gegen die Voraussetzung in allen Komponenten von F aufgehen würde. Auf diese Weise entspringt aus jedem zu π relativ regulären Quaternion F ein Primquaternion Π von der Norm π. Bedeutet umgekehrt Π irgendeines dieser Quaternionen, so wird es aus demjenigen Quaternion F hervorgehen, welches der Kongruenz $F \equiv \Pi \bmod \pi$ genügt, vorausgesetzt, daß dieses F zu π relativ regulär ist. Denn dann wird $F = \Pi + K\pi = (1 + K\Pi')\Pi$.

Es entsteht die weitere Frage, wie oft ein solches Primquaternion auf diese Weise entsteht, wobei natürlich alle assoziierten als gleich betrachtet werden.

Damit F und F_1 zu demselben Quaternion Π führen, ist zunächst notwendige Voraussetzung, daß beide relativ zu π regulär sind. Ist diese aber erfüllt, so sieht man unschwer ein, daß jenes dann und nur dann der Fall ist, wenn die Kongruenz

$$F_1 \equiv Q\,F \bmod \pi \tag{59}$$

durch ein ganzes Quaternion Q gelöst werden kann.

Denn nehmen wir zunächst an, F und F_1 erzeugen dasselbe Primquaternion Π der Norm π, so daß wir nach (58) setzen können:

$$F = A\Pi, \qquad F_1 = A_1\Pi.$$

Hier sind $n(A)$ und $n(A_1)$ prim zu π, weil $n(F)$ und $n(F_1)$ nur durch π, aber nicht durch π^2 teilbar sein sollten. Es kann daher das ganze Quaternion Q aus der Kongruenz

$$Q\,A \equiv A_1 \bmod \pi \tag{60}$$

bestimmt werden, da durch Multiplikation mit A' sofort die lösbare

$$Q\,n(A) \equiv A_1\,A' \bmod \pi \tag{60a}$$

entsteht. Multiplizieren wir nun (60) mit Π, so folgt (59).

Wir nehmen nun umgekehrt an, es bestehe die Kongruenz (59). Setzen wir dann wieder $F = A\Pi$, so folgt daraus

$$F_1 = QA\Pi + Q_1\pi = (QA + Q_1\Pi')\Pi,$$

so daß aus F_1 dasselbe Primquaternion Π entspringt wie aus F.

Ist jetzt F ein bestimmtes der Quaternionen, aus denen das Primquaternion Π entspringt, so können wir nunmehr auf die folgende Weise alle Quaternionen F_1 finden, die dasselbe Primquaternion erzeugen. Wir lassen im Produkte QF den Faktor Q alle $\pi^4 \bmod \pi$ inkongruenten Quaternionen durchlaufen. Es mögen

$$Q_1F,\ Q_2F,\ \ldots,\ Q_zF \tag{61}$$

die $\bmod \pi$ inkongruenten unter diesen Produkten sein. Hierunter ist auch das Quaternion $0 \equiv 0\,F$ enthalten. Unter den $z-1$ übrigen, $\bmod \pi$ primitiven Produkten sind dann auch diejenigen Quaternionen F_1, die dasselbe Primquaternion Π erzeugen wie F: dies sind nämlich jedenfalls alle diejenigen dieser Produkte, die relativ regulär sind zu π. Ihre Anzahl ist demnach höchstens $z-1$.

Die Zahl z kann auf folgende Weise bestimmt werden. Jedes beliebige Quaternion QF ist einem und nur einem der Produkte (61) kongruent.

Ist etwa

$$QF \equiv Q_i F \quad \text{oder} \quad (Q - Q_i) F \equiv 0 \bmod \pi,$$

so muß $Q - Q_i \equiv X \bmod \pi$ einem jener $|\pi|^2$ Quaternionen kongruent sein, die nach Satz 15 die Kongruenz (52), d. h. $XF \equiv 0 \bmod \pi$ erfüllen. Wir erhalten daher alle $|\pi|^4$ Quaternionen QF, wenn wir in

$$(Q_1 + X) F, \ (Q_2 + X) F, \ \ldots, \ (Q_z + X) F$$

für das Quaternion X alle $|\pi|^2$ Lösungen der Kongruenz (52) einsetzen. Zur Bestimmung von z folgt daher die Gleichung

$$|\pi|^4 = z \cdot |\pi|^2, \tag{62}$$
$$z = |\pi|^2.$$

Es gibt also höchstens $|\pi|^2 - 1$ Quaternionen F_1, aus denen dasselbe Primquaternion Π von der Norm π entspringt.

Wir wollen jetzt noch an die Aufgabe herantreten, zu untersuchen, wann eine Zerlegung eines ganzen Quaternions in ein Produkt von Primquaternionen erschlossen werden kann.

Dabei werden wir uns auf „primitive“ Quaternionen beschränken, d. h. solche Quaternionen, deren Komponenten keinen von Einheiten verschiedenen gemeinsamen Teiler in k besitzen. Es sei A ein solches Quaternion und

$$n(A) = \pi_1 \pi_2 \pi_3 \cdots \tag{63}$$

die Norm von A, in ihre (gleichen oder verschiedenen) Primfaktoren in k aufgelöst. Ist nun A linksseitig relativ regulär zu π_1, und Π_1 der linksseitige größte gemeinsame Teiler von A und π_1, so kann Π_1 nicht zu π_1 assoziiert sein, da sonst die Komponenten von A im Gegensatz zur Annahme alle durch π_1 teilbar sein müßten. Es kann aber nach Satz 10 auch keine Einheit sein. Π_1 ist daher ein Primquaternion von der Norm π_1. Es wird dann

$$A = \Pi_1 A_1, \tag{64}$$

wo A_1 offenbar wieder ein primitives Quaternion ist und

$$n(A_1) = \pi_2 \pi_3 \cdots \tag{64a}$$

wird. Sind nun wieder A_1 und π_2 linksseitig relativ regulär, so folgt nach denselben Schlüssen wie vorher

$$A_1 = \Pi_2 A_2, \tag{65}$$

wo Π_2 ein Primquaternion von der Norm π_2 und A_2 ein primitives Quaternion mit der Norm

$$n(A_2) = \pi_3 \pi_4 \cdots \tag{65a}$$

wird. Es wird dann weiter

$$A = \Pi_1 \Pi_2 A_2 . \tag{66}$$

Ist nun wieder A_2 linksseitig relativ regulär zu π_3, so folgt wieder

$$A_2 = \Pi_3 A_3 , \tag{67}$$

wo Π_3 ein Primquaternion der Norm π_3, A_3 ein primitives Quaternion mit der Norm

$$n(A_3) = \pi_4 \pi_5 \cdots . \tag{67a}$$

In derselben Weise kann man weiter fortfahren, wofern nur die notwendigen Regularitätsbedingungen erfüllt sind. Die Primfaktoren $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ von A sind dabei offenbar bis auf Einheitsfaktoren eindeutig bestimmt. Zu beachten ist vor allem, daß der Ablauf dieses Algorithmus abhängig ist von der Reihenfolge der Primfaktoren π, denn es ist der Fall denkbar, daß die Regularitätsbedingungen bei einer andersartigen Reihenfolge der Normprimfaktoren nicht mehr erfüllt sind. Wir wollen diesem Umstande dadurch Rechnung tragen, daß wir die Norm $n(A)$ „geordnet" nennen. Dann können wir die typischen, für die Zerlegung notwendigen Regularitätsbedingungen noch zusammenfassen in der

Definition 13. Ein primitives Quaternion A soll *total regulär* in bezug auf seine geordnete Norm $n(A) = \pi_1 \pi_2 \pi_3 \ldots$ genannt werden, wenn A linksseitig relativ regulär zu π_1, A_1 linksseitig relativ regulär zu π_2 A_2 linksseitig relativ regulär zu π_3, usw. ist. Dabei sind $A_1, A_2, \ldots$ die durch die Gleichungen (64), (65), (67), ... bestimmten primitiven Quaternionen.

Dann gilt offenbar der

Satz 19. *Ist A ein primitives, in bezug auf seine geordnete Norm total reguläres ganzes Quaternion, so gestattet es eine Zerlegung*

$$A = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \cdots \tag{68}$$

in ein Produkt von Primquaternionen. $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ sind dabei bis auf Einheitsfaktoren eindeutig bestimmt und Primquaternionen, deren Norm ein Primelement in k ist.

(Eingegangen am 2. August 1927.)

Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen.

Von

Kinjiro Sugimura in Tokio.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden einige grundlegende Sätze über das Maximalglied und den Maximalbetrag der Potenzreihen auf Dirichletsche Reihen übertragen.

Ich schreibe die Dirichletsche Reihe in der Form:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (a_n \neq 0,\ \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty,\ s = \sigma + ti)$$

und beschränke mich auf die Reihen, für die die Zahlenfolge

$$|a_n| e^{\lambda_n \sigma} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für jeden Wert von σ ein oder mehrere größte Glieder besitzt. Man sieht leicht ein, daß in diesem Falle die Koeffizienten a_n bei $n \to \infty$ gegen Null konvergieren.

Es sei $|a_\nu| e^{\lambda_\nu \sigma}$ das größte Glied oder, wenn mehrere gleich große vorhanden sind, das größte Glied mit dem größten Index. Man bezeichne mit $\Lambda(\sigma)$ die Zahl λ_ν, mit $m(\sigma)$ den Betrag $|a_\nu| e^{\lambda_\nu \sigma}$ und mit $M(\sigma)$ die obere Grenze des Betrages der Reihe auf der Gerade $\Re(s) = \sigma$, falls die Reihe auf der ganzen Geraden konvergiert, sonst setze man $M(\sigma) = \infty$.

Die Funktionen $\Lambda(\sigma)$ und $m(\sigma)$ streben offenbar mit σ gegen $+\infty$. Ebenso verhält sich die Funktion $M(\sigma)$, sofern sie für jeden Wert von σ endlich ist. Denn es gilt bekanntlich die Formel:

$$(2) \quad m(\sigma) = \operatorname{Max}(|a_n e^{\lambda_n s}|) = \operatorname{Max}\left(\left| \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\omega i} \int_{\sigma - \omega i}^{\sigma + \omega i} e^{\lambda_n (s - s')} f(s')\, ds' \right| \right) \leqq M(\sigma).$$

Konvergiert die Reihe in der ganzen Ebene absolut, dann ist $M(\sigma)$ für alle Werte von σ endlich.

Die m-Ordnung der Reihe (1), d. h.

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log\log m(\sigma)}{\sigma}$$

werde mit ϱ bezeichnet ($0 \leqq \varrho \leqq \infty$); ϱ ist nicht immer gleich der Ordnung der durch die Reihe dargestellten Funktion (Sätze 3 und 4).

Die Ergebnisse dieser Arbeit können nun wie folgt formuliert werden

Satz 1. *Es gelten die Formeln*:

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log A(\sigma)}{\sigma} = \varrho, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\log \frac{1}{|a_n|}} = \varrho \qquad (\S\,1). \tag{4}$$

Satz 2. *Es sei für ein festes positives* k

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(x^{kx}). \tag{5}$$

Dann konvergiert die Reihe (1) *mit* $\varrho < \frac{1}{k}$ *in der ganzen Ebene absolut* (§ 2).

Satz 3. *Es sei für jedes* $\delta > 0$

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(x^{\delta x}). \tag{6}$$

Dann konvergiert die Reihe (1) *von endlicher* m*-Ordnung in der ganzen Ebene absolut, und zwar ist die* m*-Ordnung gleich der Ordnung der durch die Reihe dargestellten Funktion, es gilt nämlich die Formel*:

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log\log M(\sigma)}{\sigma} = \varrho \qquad (\S\,2). \tag{7}$$

Satz 4. *Es gibt zu jeder beliebig gegebenen positiven Zahl* k *eine Reihe* (1) *mit folgenden Eigenschaften*:

a) *es gilt die Formel* (5);

b) *die Reihe konvergiert in der ganzen Ebene und zwar absolut*;

c) *die Formel* (7) *gilt nicht.*

Kürzer: In der Voraussetzung des vorigen Satzes läßt sich δ durch kein festes k ersetzen (§ 2).

Satz 5. *Es sei für ein festes* $k > 0$

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(x^k). \tag{8}$$

Dann gilt für die Reihe (1) *von endlicher* m*-Ordnung die Formel*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\log M(\sigma)}{\log m(\sigma)} = 1 \qquad (\S\,3) \tag{9}$$

Satz 6. *Es sei*

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(e^{P(x)\log x}), \tag{10}$$

wobei $P(x)$ eine beliebige mit x ins Unendliche wachsende stetige positive Funktion ist. Dann gibt es eine in der ganzen Ebene konvergente Reihe (1) *von endlicher m-Ordnung, für die die Formel* (9) *nicht gilt* (§ 4).

Also läßt sich die Bedingung (8) im vorigen Satz durch keine schwächere von der Gestalt (10) ersetzen.

Für das Bestehen von (9) unter einer schwächeren Bedingung als (8) ist noch irgendeine Abschätzung von $\frac{\log\log m(\sigma)}{\sigma}$ nach unten nötig.

Satz 7. *Es sei für ein festes $k < 1$*

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(e^{x^k}).$$

Dann gilt für die Reihe (1) *von endlicher m-Ordnung die Formel* (9), *vorausgesetzt, daß*

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\log\log m(\sigma)}{\sigma} > k\varrho \tag{11}$$

ist (§ 3).

Aus (9) folgt ersichtlich die Formel:

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\log\log M(\sigma)}{\log\log m(\sigma)} = 1. \tag{12}$$

Es besteht ferner der

Satz 8. *Für das Bestehen von* (12) *bei einer Reihe von endlicher m-Ordnung läßt sich die Bedingung* (8) *durch keine schwächere von der Gestalt*

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(e^{(\log x)^{1+k}}) \tag{13}$$

ersetzen, wobei k eine feste positive Zahl ist (§ 4).

Über die entsprechenden Entwickelungen von Hadamard, Borel, Wiman und Valiron kann man sich am besten aus dem Buche von Valiron „Lectures on the general theory of integral functions“ orientieren. Vgl. auch Pòlya und Szegö: Aufgaben und Lehrsätze, IV. Abschnitt, 1. Kapitel.

Herrn Ostrowski spreche ich für die Anregungen zu §§ 1, 3, 4 meinen besten Dank aus.

§ 1.

Mit

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \ldots$$

bezeichne man die Sprungstellen der streckenweise konstanten Funktion

$\Lambda(\sigma)$ und nehme noch eine beliebige Zahl $\sigma_0 < \sigma$ hinzu. Dann erhält man ohne weiteres wie bei Potenzreihen die Formeln[1]):

$$\Lambda(\sigma) = \Lambda(\sigma_\nu) \quad \text{für} \quad \sigma_\nu \leqq \sigma < \sigma_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

$$m(\sigma) = |a_1| e^{-\sum_{n=1}^{\nu} \sigma_n (\Lambda(\sigma_n) - \Lambda(\sigma_{n-1})) + \Lambda(\sigma)\sigma} \tag{15}$$

$$\text{für} \quad \sigma_\nu \leqq \sigma \leqq \sigma_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus (15) ergibt sich

$$\log m(\sigma) = \log|a_1| - \sum_{n=1}^{\nu} \sigma_n (\Lambda(\sigma_n) - \Lambda(\sigma_{n-1})) + \Lambda(\sigma)\sigma$$

$$= \log|a_1| + \sigma_1 \Lambda(\sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_1)\Lambda(\sigma_1) + \ldots + (\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1})\Lambda(\sigma_{\nu-1}) + (\sigma - \sigma_\nu)\Lambda(\sigma_\nu)$$

$$= \log|a_1| + \lambda_1 \sigma_1 + \int_{\sigma_1}^{\sigma} \Lambda(\sigma)\, d\sigma.$$

Also für $\sigma \geqq \sigma_1$, $\sigma' \geqq \sigma_1$:

$$\log m(\sigma) - \log m(\sigma') = \int_{\sigma'}^{\sigma} \Lambda(\sigma)\, d\sigma. \tag{16}$$

Beweis des Satzes 1. Erstens ergibt sich aus (16) für eine genügend große Zahl σ

$$\int_{\sigma}^{\sigma+a} \Lambda(\sigma)\, d\sigma = \log m(\sigma + a) - \log m(\sigma) < \log m(\sigma + a),$$

wo a eine feste positive Konstante ist. Hieraus folgt

$$a\,\Lambda(\sigma) < \log m(\sigma + a),$$

also bei $\sigma \to \infty$

$$\frac{\log \Lambda(\sigma)}{\sigma} + o(1) < \frac{\log\log m(\sigma+a)}{\sigma + a}\,(1 + o(1)),$$

folglich

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log \Lambda(\sigma)}{\sigma} \leqq \varrho.$$

Wenn nun schon die linke Seite dieser Ungleichung unendlich ist, gilt offenbar die Formel (3). Andernfalls setze man

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log \Lambda(\sigma)}{\sigma} = r < \infty. \tag{17}$$

Wir haben dann zu zeigen, daß

$$r \geqq \varrho \tag{18}$$

[1]) Vgl. z. B. Pòlya und Szegö: Aufgaben und Lehrsätze II, S. 171.

ist. Es folgt aus (16) und (17) für beliebiges $\varepsilon > 0$, wenn σ und $\sigma' < \sigma$ genügend groß sind,

$$\log m(\sigma) < \log m(\sigma') + \int_{\sigma'}^{\sigma} e^{(r+\varepsilon)\sigma}\, d\sigma = \log m(\sigma') + \frac{e^{(r+\varepsilon)\sigma} - e^{(r+\varepsilon)\sigma'}}{r+\varepsilon},$$

also folgt bei $\sigma \to \infty$

$$\log\log m(\sigma) < (r+\varepsilon)\sigma + O(1),$$

woraus die Richtigkeit von (18) hervorgeht.

Zweitens gibt es, wenn $\varrho < \infty$ ist, für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zahl $G(\varepsilon)$, so daß für $\sigma > G$

$$|a_n|\, e^{\lambda_n \sigma} \leqq m(\sigma) < e^{e^{(\varrho+\varepsilon)\sigma}},$$

also

$$|a_n| < e^{e^{(\varrho+\varepsilon)\sigma} - \lambda_n \sigma}$$

wird.

Wenn n hinreichend groß ist, darf man in dieser Ungleichung setzen:

$$\sigma = \frac{1}{\varrho+\varepsilon} \log \frac{\lambda_n}{\varrho+\varepsilon},$$

woraus folgt

$$|a_n| < e^{-\frac{\lambda_n}{\varrho+\varepsilon} \log \frac{\lambda_n}{e(\varrho+\varepsilon)}}, \quad \text{d. h.} \quad \log \frac{1}{|a_n|} > \frac{\lambda_n}{\varrho+\varepsilon} \log \frac{\lambda_n}{e(\varrho+\varepsilon)},$$

also

$$\frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\log \frac{1}{|a_n|}} < \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\varrho+\varepsilon} + O(\lambda_n)},$$

folglich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\log \frac{1}{|a_n|}} \leqq \varrho.$$

Wenn nun schon die linke Seite dieser Ungleichung unendlich ist, gilt offenbar die Formel (4). Andernfalls setze man

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\log \frac{1}{|a_n|}} = r < \infty. \tag{19}$$

Wir haben dann zu zeigen, daß $r \geqq \varrho$ ist.

Man zeigt auf Grund von (19) leicht, da a_n mit $n \to \infty$ gegen Null strebt, daß für beliebiges $\varepsilon > 0$ von einer Stelle ab

$$|a_n| < e^{-\frac{\lambda_n}{r+\varepsilon} \log \lambda_n}$$

ist. Daraus folgt

$$m(\sigma) \leqq \operatorname{Max}\left(e^{-\frac{\lambda_n}{r} \log \lambda_n + \lambda_n \sigma}\right).$$

Die Funktion $-\frac{x}{r}\log x + x\sigma$ nimmt für $x = e^{r\sigma-1}$ den größten Wert $r^{-1}e^{r\sigma-1}$ an. Folglich ist

$$m(\sigma) \leqq e^{r^{-1}e^{r\sigma-1}},$$

also

$$\log\log m(\sigma) \leqq r\sigma - 1 - \log r;$$

daraus folgt

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log\log m(\sigma)}{\sigma} \leqq r,$$

w. z. b. w.

§ 2.

Beweis des Satzes 2. Man wähle eine Zahl $\varepsilon > 0$, welche der Bedingung

$$\varrho + \varepsilon < \frac{1}{k} \tag{20}$$

unterworfen ist. Dann erhält man aus (4) für hinreichend große λ_n die Ungleichung

$$|a_n| < e^{-\frac{\lambda_n}{\varrho+\varepsilon}\log\lambda_n}. \tag{21}$$

Also folgt nach (5), da die Funktion $-\frac{x}{\varrho+\varepsilon}\log x + x\sigma$ von einer Stelle an mit wachsendem x abnimmt, für eine genügend große positive ganze Zahl p und für beliebiges festes s:

$$\sum_{p\leqq\lambda_n<p+1} |a_n e^{\lambda_n s}| < C(p+1)^{k(p+1)}\, e^{-\frac{p}{\varrho+\varepsilon}\log p + p\sigma} = e^{-\left(\frac{1}{\varrho+\varepsilon}-k\right)p\log p + O(p)},$$

woraus nach (20) sofort die Behauptung folgt.

Beweis des Satzes 3. Die erste Hälfte des Satzes ergibt sich sofort aus dem vorigen Satz. Wir haben nur die Richtigkeit der Formel (7) zu beweisen. Es genügt nach (2) zu zeigen, daß es für beliebiges $\varepsilon > 0$ Konstante $\sigma_0(\varepsilon)$ und $C(\varepsilon)$ gibt, derart, daß für $\sigma > \sigma_0$ die Ungleichheit

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}\Big| < C e^{e^{(\varrho+\varepsilon)\sigma}} \tag{22}$$

gilt. Es können $\delta > 0$ und $\omega > 1$ so gewählt werden, daß

$$\frac{1}{\varrho+\delta} - \delta > \frac{(1+\delta)\omega^2}{\varrho+\varepsilon} \tag{23}$$

ist. Es gibt nach (6) eine Konstante C_1, so daß

$$\sum_{x\leqq\lambda_n<\omega x} 1 < C_1 x^{\delta x}$$

ist, also nach (21) für $\sigma > 0$

$$\sum_{x \leqq \lambda_n < \omega x} |a_n e^{\lambda_n s}| < C_1 e^{-\frac{x}{\varrho+\delta}\log x + \omega x \sigma} x^{\delta x} = C_1 e^{-\left(\frac{1}{\varrho+\delta}-\delta\right) x \log x + \omega x \sigma}.$$

Es ist andererseits für genügend großes x und für alle $\sigma > 0$

$$\sum_{\frac{\omega x}{\varrho+\varepsilon} \leqq m < \frac{\omega^2 x}{\varrho+\varepsilon}} \frac{e^{(\varrho+\varepsilon) m \sigma}}{m!} > \frac{e^{\omega x \sigma}}{e^{\frac{\omega^2 x}{\varrho+\varepsilon}\log\frac{\omega^2 x}{\varrho+\varepsilon}}} > e^{\omega x \sigma - \frac{(1+\delta)\omega^2}{\varrho+\varepsilon} x \log x}.$$

Also nach (23) und (24)

$$\sum_{x \leqq \lambda_n < \omega x} a_n e^{\lambda_n s} < C_1 \sum_{\frac{\omega x}{\varrho+\varepsilon} \leqq m < \frac{\omega^2 x}{\varrho+\varepsilon}} \frac{e^{(\varrho+\varepsilon) m \sigma}}{m!}.$$

Folglich ergibt sich für genügend großes x_0 und für jede positive ganze Zahl ν

$$\sum_{\omega^{\nu-1} x_0 \leqq \lambda_n < \omega^{\nu} x_0} |a_n e^{\lambda_n s}| < C_1 \sum_{\frac{\omega^{\nu} x_0}{\varrho+\varepsilon} \leqq m < \frac{\omega^{\nu+1} x_0}{\varrho+\varepsilon}} \frac{e^{(\varrho+\varepsilon) m \sigma}}{m!},$$

somit ist

$$\sum_{\lambda_n \geqq x_0} |a_n e^{\lambda_n s}| < C_1 \sum_{m \geqq \frac{\omega x_0}{\varrho+\varepsilon}} \frac{e^{(\varrho+\varepsilon) m \sigma}}{m!} < C_1 e^{e^{(\varrho+\varepsilon)\sigma}}.$$

Es ist außerdem für $\lambda_n < \omega x$, $\sigma > 0$

$$|a_n e^{\lambda_n s}| \leqq \operatorname*{Max}_{\lambda_n < x_0} (|a_n| e^{\lambda_n \sigma}) < \operatorname*{Max}_{\lambda_n < x_0} (|a_n|)\, e^{e^{(\varrho+\varepsilon)\sigma}},$$

sofern $\sigma \operatorname{Max}(\lambda_n) < e^{(\varrho+\varepsilon)\sigma}$ ist, d. h. wenn σ größer als ein gewisses σ_0 ist. Also folgt für $\sigma > \sigma_0$ die Formel (22).

Beweis des Satzes 4. Es genügt nach den Sätzen 1 und 2, eine Dirichletsche Reihe mit folgenden Eigenschaften (25)—(27) zu konstruieren:

(25) $$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(x^{kx}),$$

wobei k eine beliebig gegebene feste positive Zahl ist;

(26) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\log \frac{1}{|a_n|}} = \varrho < 1, \qquad \varrho < \frac{1}{k};$$

(27) es existieren beliebig große positive Werte von σ, für die

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma} \right| > e^{e^{\sigma}}$$

ist.

Es ist keine Einschränkung vorauszusetzen, daß k kleiner als 1 ist, wodurch die zweite Bedingung von (26) auf die erste zurückgeführt wird. Man bezeichne mit y_m die positive Wurzel der Gleichung

$$y^{hy} = m \qquad (0 < h < k;\ m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es sei p eine Zahl, die alle nicht negativen ganzen Zahlen durchläuft. Man betrachte die Folge:

$$x_1 + p, \tag{28}$$

wobei $x_1 = y_1$ ist. Man betrachte ferner die Folge:

$$x_2 + p, \tag{29}$$

wobei $x_2 = y_2$ ist, falls y_2 in (28) nicht enthalten ist. Andernfalls sei x_2 das arithmetische Mittel von y_2 und der größten Zahl in (28), die noch kleiner als y_2 ist. Drittens betrachte man die Folge:

$$x_3 + p, \tag{30}$$

wobei $x_3 = y_3$ ist, falls y_3 in der aus (28) und (29) zusammengesetzten Folge nicht enthalten ist. Andernfalls sei x_3 das arithmetische Mittel von y_3 und der größten Zahl in (28) + (29), die noch kleiner als y_3 ist, usw.

Wir bezeichnen alle auf diese Weise erhaltenen Zahlen der Größe nach geordnet mit

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \to \infty. \tag{31}$$

Es ist klar, daß (31) keine endliche Häufungsstelle hat.

Ist $y_m < x + 1 \leqq y_{m+1}$, so ist im allgemeinen die Summe $\sum_{x \leqq \lambda_n < x+1} 1 = m$. eventuell ist sie noch um 1 größer. Jedenfalls erhält man

$$\sum_{x \leqq \lambda_n < x+1} 1 \geqq m = y_{m+1}^{hy_{m+1}} - 1 \geqq (x+1)^{h(x+1)} - 1$$

und

$$\sum_{x \leqq \lambda_n < x+1} 1 \leqq m + 1 = y_m^{hy_m} + 1 < (x+1)^{h(x+1)} + 1.$$

Also ergibt sich für genügend großes x

$$x^{hx} < \sum_{x \leqq \lambda_n < x+1} 1 \tag{32}$$

und

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 < (x^{hx} + 1) + ((x-1)^{h(x-1)} + 1) + \ldots < (x+1)(x^{hx} + 1) < x^{kx},$$

wodurch die Bedingung (25) erfüllt wird.

Es läßt sich nun eine Zahl ϱ wählen, für die

$$1 < \frac{1}{\varrho} < 1 + \frac{h}{4}$$

ist; wird dann

$$a_n = e^{-\frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\varrho}}$$

gesetzt, so ist die erste Bedingung von (26) erfüllt.

Nach (32) ergibt sich für genügend großes m und für jedes positive σ

$$\begin{aligned}(33)\qquad \sum_{m<\lambda_n \leqq m+1} a_n e^{\lambda_n \sigma} &> m^{hm} e^{-\frac{m+1}{\varrho}\log(m+1)+m\sigma} \\ &= e^{\left(h-\frac{1}{\varrho}\right) m \log m + O(m) + m\sigma} > e^{\left(\frac{h}{2}-\frac{1}{\varrho}\right) m \log m + m\sigma}.\end{aligned}$$

Andererseits ist für genügend großes m

$$\frac{e^{m\sigma}}{m!} < e^{m\sigma - \left(1-\frac{h}{4}\right) m \log m} < e^{m\sigma - \left(\frac{1}{\varrho}-\frac{h}{2}\right) m \log m}.$$

Also nach (33) für jedes $\sigma > 0$

$$\frac{e^{m\sigma}}{m!} < \sum_{m<\lambda_n \leqq m+1} a_n e^{\lambda_n \sigma}.$$

Daraus folgt, wenn m_1 genügend groß ist,

$$(34)\qquad \sum_{m \geqq m_1} \frac{e^{m\sigma}}{m!} < \sum_{\lambda_n > m_1} a_n e^{\lambda_n \sigma}.$$

Es ist nach (32) klar, daß es, wenn m_1 genügend groß ist, eine ganze Zahl n_1 gibt, derart, daß

$$m_1 - 1 < \lambda_{n_1} < m_1$$

ist, somit ergibt sich bei $\sigma \to \infty$

$$\sum_{m \leqq m_1 - 1} \frac{\frac{e^{m\sigma}}{m!}}{e^{\lambda_{n_1}\sigma}} \to 0.$$

Folglich ist für genügend große positive σ

$$\sum_{m \leqq m_1 - 1} \frac{e^{m\sigma}}{m!} < a_{n_1} e^{\lambda_{n_1}\sigma}.$$

Hieraus in Verbindung mit (34) folgt (27).

§ 3.

Hilfssatz. Es sei $P(x)$ eine für $x > x_0$ definierte, zugleich mit x ins Unendliche wachsende positive Funktion, die für ein festes positives k die Gleichung

$$(35)\qquad P(x) = O(e^{kx})$$

erfüllt. Es sei

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(P(x)), \tag{36}$$

dann gibt es für die Reihe (1) von endlicher m-Ordnung, zu jedem $r > \varrho$, eine Zahl $G(r)$, so daß für $\sigma > G$ die folgende Ungleichung gilt:

$$M(\sigma) < K m(\sigma) P(x_1) + K_1, \tag{37}$$

wobei K konstant,

$$x_1 = e^{r(\sigma + 2k)}, \tag{38}$$

K_1 eine nur von r abhängige Konstante ist.

Beweis. Nach dem Satz 3 konvergiert die Reihe in der ganzen Ebene absolut. Nach (35) und (36) gibt es ferner Konstanten K und K', so daß für $x > x_0$

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 < KP(x) < K' e^{kx} \tag{39}$$

ist, also für $x_1 > x_0$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \right| \leqq \sum_{\lambda_n < x_1} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} + \sum_{\lambda_n \geqq x_1}' |a_n| e^{\lambda_n \sigma} \leqq K m(\sigma) P(x_1) + \sum_{\lambda_n \geqq x_1} |a_n| e^{\lambda_n \sigma}.$$

Zu einem vorgegebenen

$$r > \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{\log \frac{1}{|a_n|}}$$

läßt sich eine Zahl $G(r)$ wählen, so daß

$$e^{r(G+2k)} > x_0$$

wird und für $\lambda_n > e^{r(G+2k)}$

$$|a_n| < e^{-\frac{\lambda_n}{r} \log \lambda_n}$$

wird. Nach (38) und (39) ergibt sich für $\sigma > G$, da die Funktion $-\frac{x}{r} \log x + x\sigma$ für $x > x_1$ abnimmt,

$$\sum_{\lambda_n \geqq x_1} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} < \sum_{\lambda_n \geqq x_1} e^{-\frac{\lambda_n}{r} \log \lambda_n + \lambda_n \sigma} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{p x_1 \leqq \lambda_n < (p+1) x_1} e^{-\frac{\lambda_n}{r} \log \lambda_n + \lambda_n \sigma}$$

$$< K' \sum_{p=1}^{\infty} e^{k(p+1)x_1 - \frac{p x_1}{r} \log (p x_1) + p x_1 \sigma} = K' \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p x_1 \left[k\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{\log p}{r} \right]}$$

$$< K' \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p e^{r(G+2k)} \left[k\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{\log p}{r} \right]} = K_1(r),$$

womit (37) bewiesen ist.

Beweis des Satzes 5. Weil $P(x) = x^k$ die Bedingung (35) erfüllt, folgt aus (37)

$$M(\sigma) < K m(\sigma) e^{kr\sigma + K_2} + K_1,$$

also

$$\frac{\log M(\sigma)}{\log m(\sigma)} < 1 + O\left(\frac{\sigma}{\log m(\sigma)}\right).$$

Wir haben also nach (2) nur zu zeigen, daß $\frac{\sigma}{\log m(\sigma)}$ gegen Null strebt. Aus $m(\sigma) \geqq |a_n| e^{\lambda_n \sigma}$ ergibt sich

$$\frac{1}{\lambda_n} \geqq \frac{\log |a_n|}{\lambda_n \log m(\sigma)} + \frac{\sigma}{\log m(\sigma)}.$$

Also ist bei festem n

$$\frac{1}{\lambda_n} \geqq \overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\sigma}{\log m(\sigma)},$$

woraus bei $n \to \infty$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\sigma}{\log m(\sigma)} = 0$$

folgt.

Beweis des Satzes 7. Es lassen sich nach (12) q und r so wählen, daß

$$k\varrho < kr < q < \overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log \log m(\sigma)}{\sigma} \tag{40}$$

ist, also wird für eine genügend große Zahl σ

$$\log m(\sigma) > e^{q\sigma}. \tag{41}$$

Nun erfüllt die Funktion $P(x) = e^{x^k}$, $(k < 1)$, die Bedingung (35), also folgt aus (37)

$$M(\sigma) < K m(\sigma) e^{e^{kr\sigma + K_2}} + K_1,$$

somit

$$\log M(\sigma) < \log m(\sigma) + K_3 e^{kr\sigma} + O(1).$$

Hieraus folgt sofort mit Rücksicht auf (40) und (41) unsere Behauptung.

§ 4.

Nach Hadamard konstruieren wir in einem rechtwinkligen Koordinatensystem den kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{K}$, der die Punkte

$$(\lambda_n, -\log |a_n|) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{42}$$

und die von allen diesen Punkten vertikal nach oben gerichteten Halbstrahlen umfaßt.

Die nicht vertikalen Seiten von $\mathfrak{K}$ haben die Gleichungen

$$y = \sigma_n x - \log m(\sigma_n);$$

die rechten Eckpunkte dieser Seiten haben die Abszissen $\Lambda(\sigma_n)$.

Zu einem Punktsystem (42) gehört offenbar eine bestimmte Dirichletsche Reihe mit positiven Koeffizienten.

Beweis des Satzes 6. Es ist keine Einschränkung vorauszusetzen, daß $P(x)$ so schwach wächst, daß

$$P(x) < \frac{\sqrt{x}}{2} \tag{43}$$

ist. Man setze

$$Q(x) = P(e^x),$$

dann gibt es für beliebiges $x_1 > 0$ eine Zahl $x_2 > 2x_1$ derart, daß

$$e^{x_1} = \frac{x_2 Q(x_2) - x_1 Q(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{44}$$

wird. Denn die Funktion

$$x(e^{x_1} - Q(x)) - x_1(e^{x_1} - Q(x_1))$$

hat für $x = 2x_1$ den Wert

$$\begin{aligned} &2x_1(e^{x_1} - Q(2x_1)) - x_1(e^{x_1} - Q(x_1)) \\ &= x_1(e^{x_1} - 2Q(2x_1) + Q(x_1)) > x_1(e^{x_1} - 2P(e^{2x_1})); \end{aligned}$$

ist also nach (43) positiv. Sie strebt außerdem mit $x \to \infty$ gegen $-\infty$. Also gibt es, da $Q(x)$ stetig ist, eine Zahl $x_2 > 2x_1$, so daß die Formel

$$x_2(e^{x_1} - Q(x_2)) - x_1(e^{x_1} - Q(x_1)) = 0$$

und somit (44) gilt.

Durch wiederholte Anwendung dieser Überlegung erhält man eine positive Zahlenfolge

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \to \infty \tag{45}$$

von der Eigenschaft, daß

$$e^{x_n} = \frac{x_{n+1} Q(x_{n+1}) - x_n Q(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \qquad x_{n+1} > 2x_n \tag{46}$$

ist. Nun betrachte man ein Polygon $\mathfrak{P}$ mit den Seiten $x = 0$ und

$$y = x_n x - x_n Q(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{47}$$

deren Eckpunkte die Abszissen 0 und (46) haben. Weil diese Abszissen gleichzeitig mit n zunehmen, ist $\mathfrak{P}$ konvex.

Für eine zum Polygon $\mathfrak{P}$ gehörende Dirichletsche Reihe sind die Zahlen (45) die Sprungstellen von $A(\sigma)$ und es gelten die Gleichungen:

$$A(x_n) = e^{x_n}, \qquad \log m(x_n) = x_n Q(x_n).$$

Daraus folgt

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log A(\sigma)}{\sigma} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log A(x_n)}{x_n} = 1.$$

Wählt man im Innern jeder Seite (47) $[e^{x_n(Q(x_n)-1)}]$ beliebige verschiedene Punkte, dann ergibt sich für die diesem Punktsystem entsprechende Reihe mit positiven Koeffizienten

$$M(x_n) > ([e^{x_n(Q(x_n)-1)}] + 2)\, m(x_n),$$

also

$$\log M(x_n) > x_n(Q(x_n) - 1) + \log m(x_n) \sim 2 \log m(x_n),$$

folglich

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log M(\sigma)}{\log m(\sigma)} > 1.$$

Wenn $x = \Lambda(x_n) = e^{x_n}$ ist, erhält man mit Rücksicht auf die zweite Beziehung von (46)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_i < x} 1 &= \sum_{j=1}^{n} ([e^{x_j(Q(x_j)-1)}] + 1) = O(n\, e^{x_n(Q(x_n)-1)}) \\ &= O(e^{x_n(Q(x_n)-1)} \log x_n) = O(e^{x_n Q(x_n)}) = O(e^{Q(\log x)\log x}) = O(e^{P(x)\log x}). \end{aligned} \tag{48}$$

Es läßt sich also durch passende Verschiebungen der Punkte auf der Seite (47) erreichen, daß die Gleichung (10) für alle x gilt. Aus (48) folgt nachträglich die Konvergenz der Reihe in der ganzen Ebene.

Damit ist alles bewiesen[2]).

Beweis des Satzes 8. Es genügt, eine in der ganzen Ebene konvergente Reihe (1) von endlicher m-Ordnung zu konstruieren, für die die Formel (13) gilt, (12) aber nicht gilt. Es sei $0 < h < k$. Man sieht wie im vorigen Beweis ein, daß es für ein genügend großes $x_1 > 0$ eine Zahl x_2 gibt derart, daß

$$e^{x_1} = \frac{x_2^{1+h} - x_1^{1+h}}{x_2 - x_1}, \qquad x_2 > 2\, x_1$$

ist. Durch wiederholte Anwendung derselben Überlegung erhält man eine positive Zahlenfolge

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \to \infty, \tag{49}$$

so daß

$$e^{x_n} = \frac{x_{n+1}^{1+h} - x_n^{1+h}}{x_{n+1} - x_n}, \qquad x_{n+1} > 2\, x_n \tag{50}$$

ist. Man betrachte ein Hadamardsches Polygon $\mathfrak{P}$ mit den Seiten $x = 0$ und

$$y = x_n x - x_n^{1+h} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{51}$$

deren Eckpunkte die Abszissen 0 und (50) haben.

---

[2]) Herr Ostrowski hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß man eine Reihe mit $\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log M(\sigma)}{\log m(\sigma)} = \infty$ erhält, wenn man statt (47) die Geraden $y = x_n x - x_n \log Q(x_n)$ als die Seiten von $\mathfrak{P}$ nimmt.

Die Zahlen (49) sind die Sprungstellen der Funktion $A(\sigma)$ einer zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Dirichletschen Reihe. Es ist außerdem

$$A(x_n) = e^{x_n}, \qquad \log m(x_n) = x_n^{1+k}, \qquad \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log A(\sigma)}{\sigma} = 1.$$

Wählt man im Innern jeder Seite (51) $[e^{x_n(x_n^k-1)}]$ beliebige verschiedene Punkte, dann erhält man für die entsprechende Reihe mit positiven Koeffizienten

$$M(x_n) > ([e^{x_n(x_n^k-1)}] + 2)\, m(x_n) > e^{x_n(x_n^k-1)},$$

woraus

$$\log\log M(x_n) > \log(x_n(x_n^k - 1)) \sim (1+k)\log x_n = \frac{1+k}{1+h}\log\log m(x_n)$$

folgt, also

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log\log M(\sigma)}{\log\log m(\sigma)} \geqq \frac{1+k}{1+h} > 1.$$

Es ist ferner für $x = e^{x_n}$

$$\begin{aligned} (52)\qquad \sum_{\lambda_i < x} 1 &= \sum_{j=1}^{n} ([e^{x_j(x_j^k-1)}] + 1) < O(n\, e^{x_n(x_n^k-1)}) = O(e^{x_n(x_n^k-1)} \log x_n) \\ &= O(e^{x_n^{1+k}}) = O(e^{(\log x)^{1+k}}). \end{aligned}$$

Durch passende Verschiebungen der Punkte auf den Seiten von $\mathfrak{R}$ läßt sich erreichen, daß diese Gleichung für jedes x gilt. Aus (52) folgt auch nachträglich die Konvergenz der Reihe in der ganzen Ebene. Damit ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 17. Juni 1927.)

Verallgemeinerung der Schnee-Landauschen Sätze.

Von

Kinjiro Sugimura in Tokio.

Einleitung.

Die von Schnee, Landau und Bohr herrührenden Sätze über das Konvergenzgebiet der Dirichletschen Reihen lauten:

Satz I. 1. Es sei

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$$

und bei wachsendem n

$$\lambda_n \to \infty,$$

sowie bei passender Wahl eines $l \geqq 0$ für alle $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{\lambda_n (l+\delta)}\right). \quad [1]$$

Es habe die Dirichletsche Reihe

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + ti)$$

ein Konvergenzgebiet. Die hier durch $(*)$ definierte Funktion $f(s)$ sei für $\sigma > \eta$ regulär; es existiere ein festes $k > 0$ derart, daß für $\sigma > \eta$ gleichmäßig

$$f(s) = O\left(|t|^k\right)$$

ist. Behauptet wird die Konvergenz der Reihe $(*)$ für $\sigma > \eta + kl$.

2. Es sei überdies für alle $\delta > 0$

$$a_n = O\left(e^{\lambda_n \delta}\right).$$

Dann wird die Konvergenz der Reihe $(*)$ für $\sigma > \frac{\eta + kl}{1+k}$ behauptet [2].

[1] Diese Bedingung ist offenbar mit $\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{\lambda_{n+1}(l+\delta)}\right)$ äquivalent.

[2] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, S. 844 bis 861. E. Landau, Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen, Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften **69** (1917), S. 336–343.

Satz II. Es sei

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}. \qquad (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,\ \lambda_n \to \infty)$$

eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzgebiet. Die durch (**) definierte Funktion $f(s)$ sei für $\sigma > \eta$ regulär und beschränkt.

1. Falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{\varepsilon \lambda_n \varepsilon}\right)$$

ist, konvergiert (**) für $\sigma > \eta$, und zwar gleichmäßig für $\sigma > \eta + \varepsilon$.

2. Falls

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \to 0$$

ist, konvergiert (**) absolut für $\sigma > \eta$ [3]).

Ich verallgemeinere diese Sätze mit Ausnahme von I. 2. folgendermaßen:

Satz 1. Es seien $P(u)$ und $Q(t)$ zwei für $u > u_0 > 0$ bzw. $t > t_0$ definierte gleichzeitig mit u bzw. mit t monoton ins Unendliche wachsende positive Funktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) $P(u)$ ist für $u > u_0$ stetig und zwar besteht für $u > u_0$, $v > u_0$ die Ungleichung: $P(u)P(v) \leqq P(u+v)$,

(2) $$\log P(u) = O(e^{pu}) \quad (p \text{ eine positive Konstante}),$$

(3) $$Q(P(u)) \leqq qu \quad \text{für} \quad u > u_0 \quad (q \text{ eine positive Konstante}).$$

Es sei

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

eine ins Unendliche wachsende Zahlenfolge, die der Bedingung

(4) $$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(P(\lambda_{n+1}))$$

unterworfen ist, und die Dirichletsche Reihe

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + ti)$$

habe ein absolutes Konvergenzgebiet. Die durch (5) definierte Funktion $f(s)$ sei für $\sigma > \eta$ regulär, und es sei dort gleichmäßig

(6) $$f(s) = O(e^{Q(|t|)}).$$

---

[3]) E. Landau, Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 317–318.

Dann konvergiert (5) für

$$\sigma > \eta + p + q. \tag{7}$$

Satz 2. $P(u)$ und $Q(t)$ seien zwei Funktionen mit den im vorigen Satze angegebenen Eigenschaften, nur sei statt (1) die folgende Bedingung erfüllt:

(1′) $P(u)$ sei für $u > u_0$ wenigstens einmal differentiierbar, und $\frac{P(u)}{P'(u)}$ sei dort beschränkt.

Die Dirichletsche Reihe (5) mit (4) habe ein Konvergenzgebiet. Die durch (5) definierte Funktion $f(s)$ sei für $\sigma > \eta$ regulär und es sei dort gleichmäßig

$$f(s) = O(e^{Q(|t|)}). \tag{6}$$

Dann konvergiert (5) für (7).

Bemerkung 1. Es ist klar, daß statt (2) bzw. (3) auch die folgenden Voraussetzungen zugrunde gelegt werden können:

(2′) Es sei für jedes $\delta > 0$

$$\log P(u) = O(e^{(p+\delta)u}),$$

wo p eine nicht negative Konstante ist.

(3′) Es sei für $u > u_0$ und für jedes $\delta > 0$

$$Q(P(u)) < (q + \delta)u,$$

wo q eine nicht negative Konstante ist.

Bemerkung 2. Ist $P(u)$ differentiierbar und $\frac{\log P(u)}{u}$ monoton, dann geht die Bedingung (1′) aus (1) hervor (§ 1, Hilfssatz, Zusatz).

Satz 3. Es sei (5) eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzgebiet. Die durch (5) definierte Funktion $f(s)$ sei für $\sigma > \eta$ regulär und beschränkt:

$$|f(s)| < K. \tag{8}$$

1. Falls bei passender Wahl eines $l \geqq 0$ für jedes $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{e^{\lambda_n (l+\varepsilon)}}\right) \tag{9}$$

ist, konvergiert (5) gleichmäßig für $\sigma > \eta + l + \delta$, wobei δ eine beliebige positive Konstante ist.

2. Falls

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} = l \tag{10}$$

ist, konvergiert (5) absolut für $\sigma > \eta + l$.

Der Satz I 1. ist ein Spezialfall des Satzes 1 sowie des Satzes 2, der sich ergibt, wenn man

$$P(u) = e^{(l+\delta)u}, \quad Q(t) = k \log t$$

setzt. Denn in diesem Falle wird:

$$P(u)P(v) = P(u+v), \qquad \frac{P(u)}{P'(u)} = \frac{1}{l+\delta} \quad \text{— also beschränkt —},$$

$$\log P(u) = (l+\delta)u = O(e^{\delta u}), \qquad Q(P(u)) = k(l+\delta)u.$$

Also kann man, wenn man die Bedingungen (2′) und (3′) zugrunde legt (Bemerkung 1), $p = 0$, $q = kl$ setzen. Satz 1 sowie Satz 2 besagen dann, daß die Reihe für $\sigma > \eta + kl$ konvergiert.

Die zum Beweis der verallgemeinerten Sätze verwendeten Schlußweisen sind ganz ähnlich wie in den oben zitierten Arbeiten.

Ich verdanke Herrn Ostrowski eine Verschärfung betreffs der Bedingung (4) und die Bemerkung in § 3.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Es sei $P(u)$ eine für $u > u_0 > 0$ definierte, gleichzeitig mit u monoton ins Unendliche wachsende positive Funktion, die für $u > u_0$, $v > u_0$ die Ungleichheit von (1) erfüllt. Dann strebt $\frac{\log P(u)}{u}$ bei ins Unendliche wachsendem u einem positiven endlichen oder unendlichen Grenzwert zu [4]).

Beweis. Ist $u_0 < u < v$, so ist nach Voraussetzung

$$(11) \qquad \frac{\log P(v)}{v} > \frac{\log P\left(\left[\frac{v}{u}\right]u\right)}{\left(\left[\frac{v}{u}\right]+1\right)u} \geqq \frac{\log P(u)^{\left[\frac{v}{u}\right]}}{\left[\frac{v}{u}\right]u} \cdot \frac{\left[\frac{v}{u}\right]}{\left[\frac{v}{u}\right]+1} = \frac{\log P(u)}{u} \cdot \frac{\left[\frac{v}{u}\right]}{\left[\frac{v}{u}\right]+1}.$$

Im Falle $\lim\limits_{v\to\infty} \frac{\log P(v)}{v} = +\infty$ ist die Behauptung trivial. Andernfalls folgt aus (11) bei festem u und unendlich wachsendem v, daß

$$(12) \qquad \lim_{v\to\infty} \frac{\log P(v)}{v} \geqq \frac{\log P(u)}{u}$$

[4]) Der Fall, in dem die Argumente nur ganzzahlige Werte durchlaufen, ist schon bekannt. M. Fekete, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 233; Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze. I. S. 17.

ist. Strebt nun u gegen $+\infty$, dann ergibt sich hieraus

$$\underline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\log P(v)}{v} \geqq \overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{\log P(u)}{u},$$

also

$$\underline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\log P(v)}{v} = \overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{\log P(u)}{u}.$$

Daß der Grenzwert positiv sein muß, ist nach (12) klar.

Zusatz. Ist überdies $P(u)$ differentiierbar und ist $\frac{\log P(u)}{u}$ monoton, dann wird die Bedingung (1′) erfüllt.

Beweis. Aus

$$(P(u))^n \leqq P(nu) \qquad (u > u_0,\ n \text{ ganz})$$

folgt, daß $\frac{\log P(u)}{u}$ nicht abnehmend ist. Also erhält man mittels Differentiation:

$$\frac{P'(u)}{uP(u)} - \frac{\log P(u)}{u^2} \geqq 0.$$

Daraus folgt, daß wenigstens von einer Stelle an

$$\frac{P(u)}{P'(u)} \leqq \frac{u}{\log P(u)}$$

ist. Nach dem Hilfssatz ist aber die rechte Seite beschränkt, also ist die Bedingung (1′) erfüllt.

Hilfssatz 2. Es sei $P(u)$ eine für $u > u_0$ definierte, zugleich mit u monoton ins Unendliche wachsende, für $u > u_0$ wenigstens einmal differentiierbare positive Funktion. Es sei außerdem $\frac{P(u)}{P'(u)}$ beschränkt. Dann gibt es erstens eine positive Zahl r, so daß

$$e^{ru} = O(P(u))$$

ist. Zweitens strebt $\frac{P(gu)}{P(u)}$, wenn $g > 1$ ist, bei unendlich wachsendem u gegen $+\infty$.

Beweis. Aus

$$\frac{P(u)}{P'(u)} < \frac{1}{r}$$

erhält man mittels Integration

$$\log \frac{P(u')}{P(u)} > r(u' - u),$$

woraus bei festbleibendem u und unendlich wachsendem u' die erste Behauptung folgt. Auch die zweite Behauptung folgt aus dieser Formel, wenn man $u' = gu$ setzt.

§ 2.

Beweis des Satzes 1.

Falls $\lim_{u\to\infty} \frac{\log P(u)}{u} = l\ (0 < l < \infty)$ ist, gibt es für jedes $\delta > 0$ eine Zahl $u_1(\delta)$, so daß für $u > u_1$

$$(l-\delta)u < \log P(u) < (l+\delta)u \tag{13}$$

ist. Aus (4) und (13) folgt für jedes $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = O\left(e^{(l+\delta)\lambda_{n+1}}\right). \tag{14}$$

Aus (3) und (13) folgt für $u > u_2$

$$Q(P(u)) \leqq qu < \frac{q}{l-\delta}\log P(u),$$

daher ist, da $P(u)$ stetig ist, für $t > t_1(\delta)$

$$Q(t) < \frac{q}{l-\delta}\log t,$$

also nach (6)

$$f(s) = O\left(|t|^{\frac{q}{l-\delta}}\right). \tag{15}$$

Nach (14), (15) und dem Satz I 1. unter Berücksichtigung der Fußnote [1]) konvergiert (5) für

$$\sigma > \eta + \frac{q}{l-\delta}l,$$

also für (7).

Es genügt somit nach Hilfssatz 1, unseren Satz unter der Annahme

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log P(u)}{u} = +\infty \tag{16}$$

zu beweisen. Die Reihe konvergiere absolut für $\sigma = \sigma_0 > \eta + p + q$. Es ist also die Konvergenz der Reihe für $\sigma = \gamma$ zu zeigen, vorausgesetzt, daß

$$\eta + p + q < \gamma < \sigma_0 \tag{17}$$

ist. Bekanntlich ist [5])

$$\left| \int_{\sigma_0-\gamma-\omega i}^{\sigma_0-\gamma+\omega i} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{m} a_n e^{-\lambda_n \gamma} \right| \tag{18}$$

$$\leqq \frac{2\,e^{w_m(\sigma_0-\gamma)}}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\,e^{-\lambda_n \sigma_0}}{|w_m-\lambda_n|} = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$S_k = \frac{2\,e^{w_m(\sigma_0-\gamma)}}{\omega} \sum_k \qquad (k = 1, 2, 3),$$

[5]) Landau, Handbuch S. 845.

wo $\omega > 0$, $w_m = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}$; $|w_m - \lambda_n| \geqq 1$ in Σ_1, $w_m - 1 < \lambda_n < w_m$ in Σ_2 und $w_m < \lambda_n < w_m + 1$ in Σ_3 ist. Σ_2 und Σ_3 können auch leer sein.

Es werde nun

$$\omega = P(g\, w_m), \qquad g > 1,$$

gesetzt.

Nach (16) sieht man leicht ein, daß, wie groß auch r sei, bei unendlich wachsendem u

$$\frac{e^{ru}}{P(u)} \to 0 \tag{19}$$

strebt. Hieraus folgt, da Σ_1 bei unendlich wachsendem m beschränkt bleibt,

$$S_1 = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0 - \gamma)}}{P(g\, w_m)}\right) \to 0. \tag{20}$$

Es ist nach (4) für eine passend gewählte Konstante C von einer Stelle ab

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = C\, P(\lambda_{n+1}),$$

also

$$\lambda_{n+v} - \lambda_n > \frac{v}{C\, P(\lambda_{n+v})}.$$

Daraus folgt, bei festem n und unendlich wachsendem v, wenn man statt $n + v$ wieder n schreibt,

$$n = O(\lambda_n\, P(\lambda_n));$$

also nach (16):

$$\begin{aligned} \log n &= O(\log \lambda_n) + O(\log P(\lambda_n)) = O(\lambda_n) + O(\log P(\lambda_n)) \\ &= O(\log P(\lambda_n)). \end{aligned} \tag{21}$$

Wenn die Summe Σ_2 nicht leer ist, ergibt sich wegen $\lambda_{m+1} < w_m + 1$ von einer Stelle ab für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{w_m - \lambda_n} \leqq \frac{2}{\lambda_{m+1} - \lambda_n} < \frac{2}{\frac{m-n+1}{C\, P(\lambda_{m+1})}} < \frac{2\, C\, P(w_m + 1)}{m-n+1} < \frac{2\, C P((1+\varepsilon)\, w_m)}{m-n+1},$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \frac{1}{w_m - \lambda_n} &= O\left(P((1+\varepsilon) w_m) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m-n+1}\right) = O(P((1+\varepsilon) w_m) \log m) \\ &= O(P((1+\varepsilon) w_m) \log P(w_m)). \end{aligned}$$

Es ist außerdem, da die Reihe für $\sigma = \sigma_0$ konvergiert:

$$a_n\, e^{-\lambda_n \sigma_0} = O(1). \tag{22}$$

Daher erhält man mit Rücksicht auf (1), (2) und (19)

$$(23)\quad S_2 = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0-\gamma)}\,P((1+\varepsilon)\,w_m)\log P(w_m)}{P(g\,w_m)}\right) = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0-\gamma+p)}}{P((g-1-\varepsilon)\,w_m)}\right)\to 0,$$

sofern $g-1-\varepsilon>0$ ist.

In Σ_3 ist ähnlich von einer Stelle ab für jedes $\varepsilon>0$:

$$\frac{1}{\lambda_n - w_m} < \frac{2\,C\,P((1+\varepsilon)\,w_m)}{n-m},$$

daher

$$\Sigma_3 \frac{1}{\lambda_n - w_m} = O\left(P((1+\varepsilon)\,w_m)\sum_{n=m+1}^{m+h}\frac{1}{n-m}\right)$$

mit $\lambda_{m+h} < w_m + 1$; also nach (21)

$$\Sigma_3 \frac{1}{\lambda_n - w_m} = O\left(P((1+\varepsilon)\,w_m)\log h\right) = O\left(P((1+\varepsilon)\,w_m)\log(m+h)\right)$$
$$= O\left(P((1+\varepsilon)\,w_m)\log P(\lambda_{m+h})\right) = O\left(P((1+\varepsilon)\,w_m)\log P(w_m+1)\right)$$
$$= O\left(P((1+\varepsilon)\,w_m)\log P((1+\varepsilon)\,w_m)\right).$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf (1), (2), (19) und (22)

$$(24)\quad S_3 = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0-\gamma)}\,P((1+\varepsilon)\,w_m)\log P((1+\varepsilon)\,w_m)}{P(g\,w_m)}\right) = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0-\gamma+(1+\varepsilon)p)}}{P((g-1-\varepsilon)\,w_m)}\right)\to 0,$$

sofern $g-1-\varepsilon>0$ ist.

Es werde nun der Cauchysche Satz auf den Integranden

$$\frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)$$

und das Rechteck mit den Seiten $\sigma=\sigma_0-\gamma$, $\sigma=\eta-\gamma+\varepsilon$ und $t=\pm\omega$ angewandt, auf und in welchem der Integrand bis auf den eventuellen Pol $s=0$ mit dem Residuum $f(\gamma)$ regulär ist. Dann ergibt sich

$$(25)\qquad \int_{(\sigma_0-\gamma)} - 2\pi i f(\gamma) = \int_{(\eta-\gamma+\varepsilon)} + \int_{(\omega)} + \int_{(-\omega)},$$

worin die Integrationsrichtungen passend anzunehmen sind.

In den beiden letzten Integralen, deren Weglänge fest ist, strebt wegen (3), (6) und (19) gleichmäßig für alle σ des Integrationsweges

$$\frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma) = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0-\gamma)+Q(\omega)}}{\omega}\right) = O\left(\frac{e^{w_m(\sigma_0-\gamma+qg)}}{P(g\,w_m)}\right)\to 0,$$

also strebt

$$(26)\qquad \int_{(\omega)} + \int_{(-\omega)} \to 0.$$

Beim ersten Integrale (25) rechts ist für genügend großes t_1:

$$(27)\quad \int_{(\eta-\gamma+\varepsilon)} = O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)}\int_0^{t_1}\frac{dt}{|s|}\right)+O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)}\int_{t_1}^{\omega}\frac{e^{Q(t)}}{t}\,dt\right)$$
$$= O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)}\right)+O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)+Q(\omega)}\log\omega\right)$$
$$= O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)+qgw_m}\log P(g\,w_m)\right)=O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon+(p+q)g)}\right)\to 0,$$

sofern $\eta-\gamma+\varepsilon+(p+q)g<0$ ist. Es lassen sich nach (17) g und $\varepsilon>0$ so wählen, daß

$$g-1-\varepsilon>0 \quad\text{und}\quad \eta-\gamma+\varepsilon+(p+q)g<0$$

wird. Die Formeln (18), (20), (23), (24), (25), (26) und (27) zusammenfassend erhält man

$$\sum_{n=1}^{m} a_n e^{-\lambda_n\gamma}-f(\gamma)\to 0,$$

w. z. b. w.

§ 3.

Beweis des Satzes 2.

Es sei

$$(28)\qquad \Re(v)=\gamma>\eta+p+q.$$

Wir beweisen die Konvergenz der Reihe für $s=v$[6]), nämlich das Bestehen der Gleichung

$$\lim_{x\to\infty}A(x)=f(v),$$

wobei

$$A(x)=\sum_{\lambda_n<x}a_n e^{-\lambda_n v}$$

ist. Es gibt nach (1′) und dem Hilfssatz 2 eine positive Zahl r, so daß

$$(29)\qquad e^{ru}=O(P(u))$$

ist. Man wähle eine positive ganze Zahl m, so daß

$$(30)\qquad \text{sowohl}\quad m>q\frac{P(u)}{P'(u)}\quad\text{für}\quad u>u_0,\quad\text{als auch}\quad m>\frac{q}{r}$$

ist. Man wähle ferner eine Zahl $\sigma_0>\gamma$ im Konvergenzgebiet der Reihe, dann ist bekanntlich für $x>\lambda_1$

$$(31)\qquad \int_{\lambda_1}^{x}dx_1\int_{\lambda_1}^{x_1}dx_2\ldots\int_{\lambda_1}^{x_{m-1}}A(x_m)\,dx_m=\frac{1}{m!}\sum_{\lambda_n\leqq x}a_n e^{-\lambda_n v}(x-\lambda_n)^m$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-\gamma-\infty i}^{\sigma_0-\gamma+\infty i}\frac{e^{sx}}{s^{m+1}}f(s+v)\,ds.$$

---

[6]) Der späteren Anwendung halber nehme ich im allgemeinen komplexes v, obwohl es hier genügt, nur reelle v zu betrachten.

Aus (3), (29) und (30) ergibt sich

$$e^{Q(P(u))} \leqq e^{qu} < e^{m\tau u} = O(P^m(u)),$$

also, da $P(x)$ stetig ist, bei unendlich wachsendem t

$$\frac{e^{Q(t)}}{t^{m+1}} \to 0.$$

Daher strebt nach (6) bei $t \to \infty$ gleichmäßig für $\eta - \gamma < \sigma < \sigma_0 - \gamma$

$$\frac{e^{sx}}{s^{m+1}} f(s+v) \to 0.$$

Es wird also nach (31), wenn $0 < \varepsilon < \gamma - \eta$ ist,

$$(32)\quad \int_{\lambda_1}^{x} dx_1 \int_{\lambda_1}^{x_1} dx_2 \dots \int_{\lambda_1}^{x_{m-1}} A(x_m)\, dx_m = R(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{\eta-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{sx}}{s^{m+1}} f(s+v)\, ds,$$

wobei

$$R(x) = \frac{x^m}{m!} f(v) + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

das Residuum des Integranden im eventuellen Pol $s = 0$ ist.

Nimmt man die m-te Differenz in bezug auf x mit dem Abstand $z > 0$ der beiden Seiten (32), dann erhält man

$$(33)\quad \int_{x}^{x+z} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+z} dx_2 \dots \int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+z} A(x_m)\, dx_m = z^m f(v) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i} \frac{\Delta^m(e^{sx})}{s^{m+1}} f(s+v)\, ds.$$

Es bestehen aber die Formeln:

$$(34)\quad |\Delta^m(e^{sx})| = |e^{sx}(e^{sz}-1)^m| \leqq e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x}(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)z}+1)^m < 2^m e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x}$$

und

$$(35)\quad |\Delta^m(e^{sx})| = \left| \int_{x}^{x+z} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+z} dx_2 \dots \int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+z} s^m e^{sx_m}\, dx_m \right| \leqq z^m |s|^m e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x}.$$

Also erhält man

$$(36)\quad \int_{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{\eta-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{\Delta^m(e^{sx})}{s^{m+1}} f(s+v)\, ds = O\left(z^m e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x} \int_0^{t_1} \frac{|f(s+v)|}{\gamma-\eta}\, dt\right)$$

$$+ O\left(z^m e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x} \int_{t_1}^{1} \frac{e^{Q(t)}}{t}\, dt\right) + O\left(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x} \int_{1}^{\infty} \frac{e^{Q(t)}}{t^{m+1}}\, dt\right).$$

Nun ist

$$\int_0^{t_1} \frac{|f(s+v)|}{\gamma-\eta-\varepsilon}\,dt = O(1), \tag{37}$$

$$\int_{t_1}^{\frac{1}{z}} \frac{e^{Q(t)}}{t}\,dt = O\left(e^{Q\left(\frac{1}{z}\right)}\log\frac{1}{z}\right). \tag{38}$$

Nach (30) läßt sich δ so klein wählen, daß für $u > u_0$

$$q-(m-\delta)\frac{P'(u)}{P(u)} < 0$$

ist, so daß dann die Funktion $\frac{e^{qu}}{P^{m-\delta}(u)}$ für $u > u_0$ abnimmt. Also gilt für $u > u_0$

$$\int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{e^{Q(t)}}{t^{m+1}}\,dt = \int_{P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}^{\infty} \frac{e^{Q(P(u))}}{P^{m+1}(u)}P'(u)\,du \leqq \int_{P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}^{\infty} \frac{e^{qu}}{P^{m-\delta}(u)}\cdot\frac{P'(u)}{P^{1+\delta}(u)}\,du \tag{39}$$

$$< z^{m-\delta}e^{qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)} \int_{P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}^{\infty} \frac{P'(u)}{P^{1+\delta}(u)}\,du = \frac{z^m}{\delta}e^{qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)} = O\left(z^m e^{qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}\right),$$

wobei $P^{-1}(u)$ die Umkehrfunktion von $P(u)$ bezeichnet.

Aus (3), (33), (36), (37), (38) und (39) ergibt sich

$$f(v)-A(x) = z^{-m}\int_x^{x+z} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+z} dx_2 \dots \int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+z} A(x_m)dx_m - A(x) + O(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x}) \tag{40}$$

$$+O\left(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x+Q\left(\frac{1}{z}\right)}\log\frac{1}{z}\right)+O\left(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x+qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}\right)$$

$$= z^{-m}\int_x^{x+z} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+z} dx_2 \dots \int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+z} (A(x_m)-A(x))dx_m + O\left(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x+qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)}\log\frac{1}{z}\right).$$

Man setze nun

$$x = \lambda_j$$

und

$$\text{(a)}\quad z = \frac{1}{P(g\lambda_{j+1})}\ (g>1)\quad \text{bzw.}\quad \text{(b)}\quad z = \frac{\varepsilon}{m},$$

je nachdem

$$\text{(a)}\quad \lambda_{j+1}-\lambda_j \leqq \varepsilon\quad \text{bzw.}\quad \text{(b)}\quad \lambda_{j+1}-\lambda_j > \varepsilon$$

ist. Es gibt wegen (4) eine Konstante C, so daß

$$\frac{1}{\lambda_{j+1}-\lambda_j} < CP(\lambda_{j+1})$$

ist. Nach (1′) und dem Hilfssatz 2 ist außerdem für genügend großes u:

$$\frac{P(gu)}{P(u)} > mC.$$

Daher wird im Falle (a)

$$\lambda_{j+1} > \lambda_j + \frac{1}{CP(\lambda_{j+1})} > \lambda_j + \frac{m}{P(g\lambda_{j+1})} = \lambda_j + mz.$$

Diese Ungleichung gilt offenbar auch im Falle (b). Also ist in (40) rechts

$$A(x_m) - A(x) = 0. \tag{41}$$

Es kann ferner nach (28) $\varepsilon > 0$ und $g > 1$ so gewählt werden, daß $\eta - \gamma + \varepsilon + (p+q)g < 0$ wird. Dann ist im Falle (a), nach (2)

$$e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x+qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)} \log\frac{1}{z} = O\left(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)\lambda_j+(p+q)g\lambda_{j+1}}\right)$$

$$= O\left(e^{[\eta-\gamma+\varepsilon+(p+q)g]\lambda_j+(p+q)\varepsilon}\right)$$

und im Falle (b), da z konstant ist,

$$e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)x+qP^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)} \log\frac{1}{z} = O\left(e^{(\eta-\gamma+\varepsilon)\lambda_j}\right).$$

Jedenfalls konvergiert die rechte Seite von (40) mit $j \to \infty$ gegen Null, w. z. b. w.

Bemerkung. Falls das Glied $a_n e^{\lambda_n v}$ mit $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, kann die Voraussetzung (4) durch die folgende ersetzt werden:

$$\frac{1}{\lambda_{n+k} - \lambda_n} = O(P(\lambda_{n+k})),$$

wobei k eine feste positive ganze Zahl ist.

In diesem Falle erhält man nämlich bei passender Wahl von x und z statt (41)

$$A(x_m) - A(x) \to 0.$$

Ich möchte hier noch zwei spezielle Fälle des Satzes 2 hervorheben

I. Es sei bei passender Wahl eines $l \geqq 0$ für jedes $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{(l+\delta)\lambda_n \log \lambda_n}\right).$$

Es sei (5) eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzgebiet. Die durch (5) definierte Funktion $f(s)$ sei für $\sigma > \eta$ regulär und es sei dort gleichmäßig

$$f(s) = O\left(e^{\frac{k|\log|t|}{|\log\log|t|}}\right) \qquad (k > 0).$$

Dann konvergiert (5) für $\sigma > \eta + kl$.

II. Es sei bei passender Wahl eines $l \geqq 0$ für jedes $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{e^{(l+\delta)\lambda_n}}\right).$$

Es sei (5) eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzgebiet. Die durch (5) definierte Funktion sei für $\sigma > \eta$ regulär und es sei dort gleichmäßig

$$f(s) = O(e^{k \log\log|t|}) \qquad (k > 0).$$

Dann konvergiert (5) für $\sigma > \eta + (k+1)l$.

§ 4.

Beweis des Satzes 3.

Es sei

$$\Re(v) = \gamma > \eta + l + \delta. \tag{42}$$

Aus (8) bzw. (9) folgt offenbar für jedes $\varepsilon > 0$

$$f(s) = O(e^{\varepsilon \log\log|t|}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{e^{\lambda_{n+1}(l+\varepsilon)}}\right).$$

Folglich sind die Bedingungen im Satz 2 für

$$P(u) = e^{e^{u(l+\varepsilon)}}, \quad Q(t) = \varepsilon \log\log t$$

erfüllt, woraus man leicht schließt, daß

$$p = l + \varepsilon, \quad q = \varepsilon(l+\varepsilon)$$

und in (30)

$$m = 1$$

ist. Also folgt aus (33), daß für

$$\eta + l < \gamma \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\delta}{3} < \gamma - \eta$$

also um so mehr für (42)

$$\int_x^{x+z} A(x_1)\,dx_1 = z f(v) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-\gamma+\frac{\delta}{3}-\infty i}^{\eta-\gamma+\frac{\delta}{3}+\infty i} \frac{\Delta(e^{sx})}{s^2} f(s+v)\,ds$$

wird. Also ist nach (8), (34), (35) und (42)

$$|f(v) - A(x)| \leqq \left| z^{-1} \int_x^{x+z} (A(x_1) - A(x))\,dx_1 \right| + \frac{e^{\left(\eta-\gamma+\frac{\delta}{3}\right)x}}{2\pi} \int_0^1 \frac{K}{l + \frac{2}{3}\delta}\,dt$$

$$+ \frac{e^{\left(\eta-\gamma+\frac{\delta}{3}\right)x}}{2\pi} \int_1^{\frac{1}{z}} \frac{K}{t}\,dt + \frac{2 z^{-1} e^{\left(\eta-\gamma+\frac{\delta}{3}\right)x}}{2\pi} \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{K}{t^2}\,dt. \tag{43}$$

Nun ist für $n > n_0$:

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < \exp e^{\left(l+\frac{\delta}{3}\right)\lambda_n}.$$

Somit ist, wenn $\frac{1}{z} = \exp e^{\left(l+\frac{\delta}{3}\right)x}$ und $x = \lambda_n$ gesetzt wird, $\lambda_{n+1} > x + z$, folglich im ersten Integral (43) rechts

$$A(x_1) = A(x). \tag{44}$$

Außerdem ist

$$\int_1^{\frac{1}{z}} \frac{K}{t}\,dt = K e^{\left(l+\frac{\delta}{3}\right)x}, \qquad \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{K}{t^2}\,dt = Kz. \tag{45}$$

(42), (43), (44) und (45) zusammenfassend erhält man

$$|f(v) - A(x)| < K_1 e^{\left(\eta-\gamma+\frac{\delta}{3}+l+\frac{\delta}{3}\right)x} < K_1 e^{-\frac{\delta x}{3}},$$

wo K_1 eine von v unabhängige Konstante ist, daraus geht unmittelbar die erste Behauptung hervor.

Aus (10) ergibt sich für $n > n_0(\varepsilon)$

$$\log n < (l+\varepsilon)\lambda_n,$$

also

$$e^{-\lambda_n(l+2\varepsilon)} < \frac{1}{n^{1+\delta}},$$

wo $\delta = \frac{\varepsilon}{l+\varepsilon}$ ist. Daraus folgt, wenn γ eine reelle Zahl im Konvergenzgebiet bezeichnet,

$$\begin{aligned} |a_n e^{-\lambda_n(\eta+l+3\varepsilon)}| &= e^{-\lambda_n(\eta+l+3\varepsilon)} \left| \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{\lambda_n s} f(s)\,ds \right| \\ &= e^{-\lambda_n(\eta+l+3\varepsilon)} \left| \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{\eta+\varepsilon-\omega i}^{\eta+\varepsilon+\omega i} e^{\lambda_n s} f(s)\,ds \right| \leqq e^{-\lambda_n(\eta+l+3\varepsilon)} K e^{\lambda_n(\eta+\varepsilon)} \\ &= K e^{-\lambda_n(l+2\varepsilon)} < \frac{K}{n^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

Hieraus schließt man sofort die zweite Behauptung.

(Eingegangen am 17. Juni 1927.)

On Weingarten Surfaces.

Von

Prof. C. E. Weatherburn in Christchurch (New Zealand).

§ 1.

Characteristic differential equation.

It is proposed to examine various properties of Weingarten surfaces with the aid of the two-parametric differential invariants [1]) for a surface, recently introduced and examined by the writer. As is well known, Weingarten surfaces (or W-surfaces) are characterised by the property that there is a functional relation between the principal curvatures of the surface, and therefore also between the first (or mean) curvature, J, and the second (or Gaussian) curvature, K. Thus the lines $J = \text{const.}$ on the surface coincide with the lines $K = \text{const.}$ These may be called the *lines of constant curvature.*

First let us show that the unit vector $\boldsymbol{n}$ normal to a W-surface must satisfy a certain differential equation. Since the vector gradient, ∇J, of the function J on the surface is parallel to that of the function K, and each of these is tangential to the surface, we must have the relation

$$\nabla J \times \nabla K \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{1}$$

the cross denoting a "vector product", and the dot a "scalar product". And conversely, if this condition is satisfied, the surface is a W-surface. This equation may be neatly expressed in terms of the unit normal $\boldsymbol{n}$. For, as we have shown elsewhere [2]),

$$J = -\operatorname{div} \boldsymbol{n}$$

[1]) All the differential invariants (grad, div, rot etc.) of this paper, except those in Art. 5, are the two-parametric invariants discussed by the writer in a recent paper "On Differential Invariants in Geometry of Surfaces, etc.", *Quarterly Journal of Mathematics* **50** (1925), pp. 230—269. An independent account of these is given in Chapter XII of the author's *Differential Geometry* (Cambridge University Press, January, 1927).

[2]) *Quarterly Journal*, loc. cit., pp. 237 and 243, or *Differential Geometry*, Arts. 116 and 119.

and [3])

$$2K = \boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{n} + (\operatorname{div} \boldsymbol{n})^2$$

and thus, since rot $\boldsymbol{n}$ is zero, (1) is equivalent to

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla J \times [\nabla (\boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{n}) + 2J \nabla J] \cdot \boldsymbol{n} \\ &= \nabla J \times [\nabla^2 \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} (\nabla^2 \boldsymbol{n})] \cdot \boldsymbol{n} \end{aligned}$$

or

$$(\nabla J \cdot \nabla \boldsymbol{n}) \cdot (\nabla J \times \boldsymbol{n}) + \nabla J \cdot \operatorname{rot} (\nabla^2 \boldsymbol{n}) = 0 \tag{2}$$

which is one form of the differential equation. The first term of this equation may also be expressed $(\operatorname{rot} \nabla J) \times \boldsymbol{n} \cdot (\nabla J \times \boldsymbol{n})$ or $\nabla J \cdot \operatorname{rot} \nabla J$. Hence an alternative form for the condition (2) is

$$(\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{n}) \cdot \operatorname{rot} (\nabla^2 \boldsymbol{n} - \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{n}) = 0 . \tag{3}$$

Thus, since the analysis is reversible, we have the theorem:

A necessary and sufficient condition that a given surface be a W-surface is that the unit normal satisfy the differential equation (2) *or* (3).

§ 2.

Lines of constant curvature.

The fundamental properties of the family of lines of constant curvature on a W-surface, may be neatly expressed in terms of differential invariants of $\boldsymbol{n}$. These lines are given by $J = \text{const.}$, where $J = -\operatorname{div} \boldsymbol{n}$. The *distance function*, ψ, for the family of curves is the reciprocal of the magnitude of ∇J. Thus

$$\psi^2 = \frac{1}{(\nabla J)^2} . \tag{4}$$

The *line of striction* of the family is the locus of points at which the divergence of the unit tangent vanishes identically, and is given by [4])

$$(\nabla \psi \times \nabla J) \cdot \boldsymbol{n} = 0 . \tag{5}$$

The *geodesic curvature* $\varkappa_g$ of a line of constant curvature is

$$\varkappa_g = -\operatorname{div} (\psi \nabla J) = -(\psi \nabla^2 J + \nabla \psi \cdot \nabla J) \tag{6}$$

and the curves will be geodesics if this expression vanishes identically. The *moment* [5]), M, of the family, which is equal to the torsion of the geodesic tangent, is given by

$$M = -\psi \nabla J \cdot \operatorname{rot} (\psi \nabla J) = -\psi^2 \nabla J \cdot \operatorname{rot} \nabla J \tag{7}$$

---

[3]) $\nabla^2 \varphi$ is identical with Beltrami's differential parameter of the second order.

[4]) See a paper by the author "On Families of Curves on a Surface", recently communicated to the *Tôhoku Mathematical Journal*. The formulae corresponding to (5)—(8) are proved for a family of curves $\varphi = \text{const.}$ on any surface.

[5]) *Differential Geometry*, Art. 130.

and the curves will be a family of lines of curvature provided this vanishes identically. It should be observed that the first term in (2) is proportional to the moment as given by (7).

The *normal curvature*, $\varkappa_n$, of the surface in the direction of the line $J = \text{const.}$ has the value expressed by [6])

$$\varkappa_n = J - \psi^2 (\nabla J \times \boldsymbol{n}) \cdot \operatorname{rot} \nabla J \tag{8}$$

and the curves will be asymptotic lines if this vanishes identically.

The lines of constant curvature and their orthogonal trajectories will constitute an *isometric system* of curves on the surface provided $\psi^2 \nabla^2 J$ is a function of J only [7]), that is to say, provided

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla J \times \nabla (\psi^2 \nabla^2 J) = 0 . \tag{9}$$

§ 3.

Surface of constant first curvature, J.

Consider next the particular class of Weingarten surface on which the first (or mean) curvature, J, is constant. The *lines of constant curvature* are given by $K = \text{const.}$ Now, since ∇J vanishes identically, we have [8])

$$\nabla^2 \boldsymbol{n} = (2K - J^2) \boldsymbol{n} , \tag{10}$$

so that

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{n} = 2K - J^2 .$$

If then we denote the function $\boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{n}$ by φ, the lines of constant curvature are the lines $\varphi = \text{const.}$ The fundamental properties of this family of curves are found by the same formulae as in Art. 2, if J is replaced by φ.

We may, however, use a different method in this case. For, in virtue of (10),

$$\operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n} = 2 \nabla K \times \boldsymbol{n} . \tag{11}$$

Thus $\operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}$ is perpendicular to ∇K on the surface, and is therefore tangential to the line of constant curvature. The unit tangent, $\boldsymbol{t}$, to this curve is thus

$$\boldsymbol{t} = \omega \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n} \tag{12}$$

where

$$\omega^2 = \frac{1}{(\operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n})^2} .$$

---

[6]) *Tôhoku Math. Journal*, loc. cit.

[7]) *Diff. Geom.*, Art. 117.

[8]) *Ibid.*, p. 231.

The *line of striction*[9]) of the family is then given by $\operatorname{div} \boldsymbol{t} = 0$, or

$$\nabla \omega \cdot \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n} = 0$$

since the divergence of the rotation of a normal vector is zero. Similarly the *geodesic curvature* of a line of constant curvature has the value

$$\varkappa_g = -\operatorname{div}(\omega \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot}(\omega \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}).$$

The *moment* of the family is given by

$$M = \boldsymbol{t} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{t} = \omega^2 (\operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}) \cdot (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n})$$

and the *normal curvature* in the direction of the curve is

$$\varkappa_n = -(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{t} = -\omega^2 (\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}) \cdot (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}).$$

Further properties of a surface of constant J may be obtained in the following manner. Let the lines of curvature be taken as parametric curves $v = \text{const.}$ and $u = \text{const.}$ with unit tangents $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ respectively. Let E and G denote as usual the first order magnitudes of the surface, $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ the principal curvatures in the directions of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$, and B the difference of these curvatures. Thus

$$B = \varkappa_1 - \varkappa_2 = 2\varkappa_1 - J \tag{13}$$

and, since J is constant, it follows that

$$\nabla \varkappa_2 = -\nabla \varkappa_1. \tag{14}$$

The lines of constant curvature are the lines along which each of the quantities $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ and K is constant. Now, in virtue of the Mainardi-Codazzi relations, we have

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{1}{B\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \varkappa_2$$

and

$$\operatorname{div} \boldsymbol{b} = \frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{1}{B\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \varkappa_1.$$

Therefore, in consequence of (14),

$$-(\boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{b}) = \frac{1}{B}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \varkappa_1 + \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \varkappa_1\right) = \frac{1}{B} \nabla \varkappa_1 = \frac{1}{2} \nabla \log B. \tag{15}$$

Now the vector in the first member is the tangential component of the vector curvature[10]) of the lines of curvature; and (15) shows that this is expressible as the gradient of a scalar function. It follows then that the

---

[9]) See a recent paper by the author on "Some new Theorems in Geometry of a Surface", *The Mathematical Gazette* **13** (Jan., 1926), pp. 1–6, or *Differential Geometry*, Art. 126.

[10]) *The Mathematical Gazette*, loc. cit., Arts. 5, 6, or *Diff. Geom.*, Art. 125.

lines of curvature form an isometric system of curves on the surface[11], a property which is well known for a surface of constant first curvature. Consequently, in virtue of a theorem we have proved elsewhere[12]), we have the result:

Any orthogonal system of curves cutting the lines of curvature at a variable angle θ will constitute an isometric system provided θ satisfies the differential equation $\nabla^2\theta = 0$.

Let $\boldsymbol{h}$ denote the vector in the first member of (15). This equation shows that $\boldsymbol{h}$ is parallel to $\nabla\varkappa_1$ and therefore perpendicular to the line of constant curvature. The tangent to this curve is thus parallel to the vector $\boldsymbol{b}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}$; and since $-\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}$ and $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ are the geodesic curvatures of the lines of curvature, we have:

The lines $K = \text{const.}$ are orthogonal to the resultant vector curvature of the lines of curvature, and are inclined to the principal direction $v = \text{const.}$ at an angle θ given by

$$\tan\theta = -\frac{\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}}{\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}} = \frac{\text{geodesic curvature of } u = \text{const.}}{\text{geodesic curvature of } v = \text{const.}} \tag{16}$$

Other interesting relations between the above quantities may be noticed in passing. We have shown elsewhere[13]) that the second curvature is equal to the divergence of $\boldsymbol{h}$. Thus

$$K = \mathrm{div}\,\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\nabla^2 \log B\,. \tag{17}$$

The gradients of $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ and K are all parallel to $\boldsymbol{h}$. Their values are found as follows. From (15) we have

$$\nabla\varkappa_1 = -\nabla\varkappa_2 = B\,\boldsymbol{h} \tag{18}$$

and since $\nabla B = 2\nabla\varkappa_1$ it follows that

$$\nabla^2\varkappa_1 = \mathrm{div}\,B\,\boldsymbol{h} = B(2\,\boldsymbol{h}^2 + K) \tag{19}$$

and $\nabla^2\varkappa_2$ is the negative of this. Similarly

$$\nabla K = \nabla(\varkappa_1\varkappa_2) = (\varkappa_2 - \varkappa_1)\nabla\varkappa_1 = -B^2\boldsymbol{h} \tag{20}$$

and consequently

$$\nabla^2 K = -\mathrm{div}\,B^2\boldsymbol{h} = -B^2(4\,\boldsymbol{h}^2 + K) \tag{21}$$

the quantity $\boldsymbol{h}^2$ being the "square" of the tangential curvature of the lines of curvature, having the value $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})^2 + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{b})^2$.

---

[11]) See Art. 1 of a paper by the author "On Isometric Systems of Curves and Surfaces", recently communicated to the *American Journal of Math.* Vol. 49, p. 527.

[12]) *Ibid.*, Art. 2.

[13]) *The Mathematical Gazette*, loc. cit., p. 5.

Similarly we might examine some of the properties of a *surface of constant second curvature*, $K = c$. For this surface

$$\varkappa_2 = \frac{c}{\varkappa_1}, \qquad \nabla\varkappa_2 = -\frac{c}{\varkappa_1^2}\nabla\varkappa_1 = -\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\nabla\varkappa_1 . \tag{22}$$

Also since $\boldsymbol{b}\cdot\nabla\varkappa_1 = -B\operatorname{div}\boldsymbol{b}$, and

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\varkappa_1 = -\frac{c}{\varkappa_2^2}\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\varkappa_2 = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}B\operatorname{div}\boldsymbol{a}$$

we have

$$\nabla\varkappa_1 = -B\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{b}\right). \tag{23}$$

The line of constant curvature is perpendicular to this vector, and therefore makes with the direction of $\boldsymbol{a}$ an angle θ given by

$$\tan\theta = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{a}}{\operatorname{div}\boldsymbol{b}}$$

which is the ratio of the principal curvatures divided by the ratio of the geodesic curvatures of the lines of curvature.

§ 4.

Surface of Revolution.

A surface of revolution is a Weingarten surface on which the curves $J = \text{const.}$ and the curves $K = \text{const.}$ are one and the same system of lines of curvature. For, if u is the parameter determining the parallel, and v that determining the meridian, J and K are both functions of u only. Thus ∇J is parallel to a line of curvature; so that the derivative of $\boldsymbol{n}$ in the direction of ∇J is parallel to ∇J. We may express this by the equation

$$(\nabla J\cdot\nabla\boldsymbol{n})\times\nabla J\cdot\boldsymbol{n} = 0 . \tag{24}$$

Now the first member of this equation is identical with the first term of (2). Hence the result:

On a surface of revolution the unit normal satisfies the pair of equations

$$\begin{cases} (\nabla J\cdot\nabla\boldsymbol{n})\times\nabla J\cdot\boldsymbol{n} = 0 \\ \nabla J\cdot\operatorname{rot}(\nabla^2\boldsymbol{n}) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

which may be expressed in the alternative form

$$\begin{cases} (\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{n})\cdot\operatorname{rot}(\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{n}) = 0 \\ (\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{n})\cdot\operatorname{rot}(\nabla^2\boldsymbol{n}) = 0 \end{cases} \tag{25'}$$

Conversely, if $\boldsymbol{n}$ satisfies both these conditions, the surface is a W-surface: and, unless ∇J vanishes identically, the lines J const. and

$K = \text{const.}$ are one system of lines of curvature. The surface is therefore a surface of revolution. If, however, J is constant, both the above equations are satisfied in consequence. In order that the lines $K = \text{const.}$ should be a system of lines of curvature, it is necessary and sufficient that

$$(\nabla K \cdot \nabla \boldsymbol{n}) \times \nabla K \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{26}$$

an equation which, in virtue of (11), may be expressed in the alternative form

$$(\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}) \cdot \nabla \boldsymbol{n} \cdot (\operatorname{rot} \nabla^2 \boldsymbol{n}) = 0 . \tag{26'}$$

Hence the result:

A surface of constant first curvature will be a surface of revolution provided the unit normal satisfies the equation (26′).

§ 5.

Family of Weingarten surfaces.

Lastly, consider a singly infinite family of surfaces, each of which is a W-surface. The unit normal $\boldsymbol{n}$ to a surface, and the values of J and K, are now point-functions in the space occupied by the surfaces. We therefore employ the ordinary *three-parametric invariants* (grad, div, rot etc.) for this space, the operator ∇ now involving three parameters. The gradients of J and K on any surface are in this case the components of ∇J and ∇K tangential to that surface. Hence, in order that the lines $J = \text{const.}$ on any surface should coincide with the lines $K = \text{const.}$ it is necessary and sufficient that the three vectors $\boldsymbol{n}$, ∇J and ∇K be coplanar. Thus:

A necessary and sufficient condition that a singly infinite family of surfaces may consist of W-surfaces is expressed by the equation

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla J \times \nabla K) = 0 . \tag{27}$$

Now we have shown elsewhere that, in the case of a family of surfaces, the curvatures J and K are given in terms of three-parametric invariants by the formulae [14])

$$J = -\operatorname{div} \boldsymbol{n}$$

and

$$\begin{aligned} 2K &= \operatorname{div}(\boldsymbol{n} \operatorname{div} \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{n}) \\ &= \boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{n} + (\operatorname{div} \boldsymbol{n})^2 + (\operatorname{rot} \boldsymbol{n})^2 . \end{aligned}$$

[14]) *Differential Geometry*, Art. 131, or Art. 2 of a paper by the author "On Families of Curves and Surfaces", recently communicated to the *Quarterly Journal of Math.* Vol. 50, pp. 350–361.

The condition (27) may therefore be expressed by the equation

$$(27') \qquad \boldsymbol{n}\cdot[(\nabla \operatorname{div}\boldsymbol{n}) \times \nabla[\boldsymbol{n}\cdot\nabla^2\boldsymbol{n} + (\operatorname{rot}\boldsymbol{n})^2]] = 0\,.$$

If the family of surfaces is given in the form $\varphi = \text{const.}$, where φ is a point-function in space, then on writing $\psi^2 = \frac{1}{(\nabla\varphi)^2}$ we have for J and K the values[15])

$$J = -(\psi\nabla^2\varphi + \nabla\psi\cdot\nabla\varphi)$$

and

$$2K = \operatorname{div}(\psi^2\nabla^2\varphi\nabla\varphi + \nabla\log\psi)\,.$$

Substituting these values in (27) we obtain the necessary and sufficient condition that the family of surfaces $\varphi = \text{const.}$ may be a family of W-surfaces.

In the family of surfaces just considered the functional relation between J and K might vary from one surface to another. All that we have supposed is that the lines $J = \text{const.}$ coincide with the lines $K = \text{const.}$ on each surface. If, however, for the whole space occupied by the surfaces there is a definite functional relation between J and K, then the *surfaces* $J = \text{const.}$ coincide with the surfaces $K = \text{const.}$, and consequently ∇J is parallel to ∇K. The condition necessary for this property may be expressed

$$(28) \qquad \nabla J \times \nabla K = 0\,.$$

In order to include the cases in which J or K is constant, we may state the theorem:

A necessary and sufficient condition that, for a family of surfaces, there should be a definite functional relation between the principal curvatures at a point, is expressed by the equation (28).

This condition is equivalent to two scalar equations, while (27) is only one. The values of J and K given above may be substituted in (28), and this condition expressed in terms of either $\boldsymbol{n}$ or φ.

Canterbury College, Christchurch, N. Z., May, 1927.

[15]) See a paper by the author "On Families of Surfaces", recently communicated to the *Mathematische Annalen*.

(Eingegangen am 5. Aug. 1927.)

Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z, \varrho)$.

I. Die reellen Nullstellen von $P(z, \varrho)$ bei positivem reellem ϱ.

Von

G. Rasch in Kopenhagen.

§ 1.

Einleitung.

1. Das zweite Eulersche Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \Re z > 0$$

kann dargestellt werden als Summe der beiden Integrale

$$(\mathrm{P}) \qquad P(z, \varrho) = \int_0^\varrho e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \Re z > 0$$

und

$$(\mathrm{Q}) \qquad Q(z, \varrho) = \int_\varrho^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

wobei die Integrationswege die negative Achse nicht schneiden sollen. Die beiden Funktionen $P(z, \varrho)$ und $Q(z, \varrho)$ heißen unvollständige Gammafunktionen. Für ihre verschiedenen Eigenschaften, von denen wir im folgenden Gebrauch machen, sei verwiesen auf N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin 1924, S. 388—406 und Niels Nielsen, Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, S. 26—36, 209—219.

2. Die Untersuchung der Nullstellen der P-Funktion wurde begonnen von Bourguet[1]). Er bewies: $P(z) = P(z, 1)$ hat für ganzes $p \geqq 2$ mindestens eine Nullstelle in jedem der Intervalle $-2p-1 > z > -2p-\frac{3}{2}$ und $-2p-\frac{3}{2} > z > -2p-2$ und keine reellen Nullstellen außerhalb

[1]) C. R. Acad. Sc. Paris **96** (1886), S. 1307—1310, 1487—1490.

dieser Intervalle. Außerdem behauptete er, daß $P(z)$ höchstens vier imaginäre Nullstellen habe. Sein Beweis dafür wurde von Jensen[2]) und Nielsen[3]) als ungenau bezeichnet, treffender mag man ihn mit Haskins[4]) unvollständig nennen. Der Bourguetsche Beweis gründet sich nämlich darauf, daß $z\,P(z) \to \frac{1}{e}$ und $z^2\,P'(z) \to -\frac{1}{e}$ strebt, wenn z so gegen Unendlich geht, daß der Abstand zwischen z und dem nächsten Pole nicht unbegrenzt klein wird. Das drückt Bourguet etwas nachlässig so aus: „... si le cercle d'interprétation ne passe par aucun pôle ...", und jene Grenzbeziehungen sind wohl richtig, aber nicht durch einen bloßen Hinweis auf die Partialbruchentwicklung für $P(z)$ bewiesen.

Haskins[5]) hat mit Hilfe einer Erweiterung des Budan-Fourierschen Satzes dargetan, daß in jedem der obengenannten Intervalle genau eine Nullstelle liegt; aus Bourguets Ausführungen folgt dann, daß die Gleichung $P(z) = 0$ genau vier imaginäre Wurzeln hat[4]). Durch unmittelbare Untersuchung der Partialbruchentwicklung ist dieses Ergebnis von Gronwall[6]) gewonnen worden. Gronwall zeigte außerdem, daß sich die vier imaginären Wurzeln in einem Rechteck mit den Ecken $-\frac{17}{2} \pm \frac{11}{2}\,i$, $-\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}\,i$ befinden, und gab enge Schranken für die reellen Nullstellen an. Diese Schranken wurden von Walther[7]) verschärft, der auch die asymptotische Lage der Nullstellen bestimmte. Schließlich hat Franklin[8]) die imaginären Nullstellen auf 7 Dezimalen zu

$$-1{,}7262976 \pm 1{,}2380921\,i, \qquad -3{,}7264730 \pm 0{,}5406746\,i$$

berechnet.

Während also für $\varrho = 1$ die Nullstellen von $P(z, \varrho)$ recht eingehend behandelt sind, liegt für willkürliches positives ϱ nichts weiter vor als das Ergebnis von Nielsen[9]): $P(z, \varrho)$ ist negativ in den Intervallen $-2p > z > -2p-1$ bei ganzem, nicht negativem p und positiv in den Intervallen $-2p-1 > z > -2p-2$ mit $0 \leqq p \leqq \left[\frac{\varrho-1}{2}\right]$, sowie für $z > 0$. Bei $0 < \varrho \leqq 1$ hat Jensen[10]) Schranken für die imaginären Nullstellen gefunden, und außerdem hat er bewiesen, daß $P(z, \varrho)$ für

[2]) Nyt Tidsskrift Math. **2** *B* (1891), S. 94.
[3]) Gammafunktion S. 36.
[4]) Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1916), S. 375.
[5]) Trans. Amer. Math. Soc. **16** (1915), S. 405–412.
[6]) Ann. Éc. Norm. (3) **33** (1916), S. 381–393.
[7]) Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 238–245.
[8]) Annals of Math. (2) **21** (1919), S. 61–63.
[9]) loc. cit. S. 34.
[10]) Kgl. Danske Vidsk. Selsk. math. fys. Medd. VIII, 2 (1927), S. 4–7.

willkürliches komplexes ϱ keine Nullstellen in dem Teile der Halbebene $\Re z \geqq -\frac{3}{2}$ hat, der außerhalb des Kreises $|z+1| = 2|\varrho|$ liegt.

3. In der vorliegenden Arbeit werden hauptsächlich die reellen Nullstellen von $P(z, \varrho)$ bei $\varrho > 0$ untersucht. Zunächst wird bewiesen:

Jedem $\varrho > 0$ entspricht eine ganze Zahl $p(\varrho)$ derart, daß in jedem der Intervalle $(-2p, -2p+\frac{1}{2})$ und $(-2p+\frac{1}{2}, -2p+1)$ für $p \geqq p(\varrho)+1$ genau eine einfache Nullstelle liegt, während das Intervall $(-2p(\varrho), -2p(\varrho)+1)$ entweder zwei einfache Nullstellen oder eine doppelte Nullstelle enthält. Andere reelle Nullstellen hat $P(z, \varrho)$ nicht. Die Anzahl der imaginären Nullstellen beträgt $2p(\varrho)-2$.

Für große ϱ wird die Zahl $p(\varrho)$ genau bestimmt — in gewissen Ausnahmefällen nur bis auf eine Einheit; in erster Annäherung ist

$$2p(\varrho) = \varkappa\varrho + O(\log\varrho),$$

wobei $\varkappa = 3{,}59112\ldots$ die positive Wurzel der Gleichung

$$\varkappa \log \varkappa = \varkappa + 1$$

bedeutet.

Umgekehrt gehört zu jedem positiven ganzen p eine Zahl ϱ_p derart, daß $P(z, \varrho) = 0$ im Intervall $(-2p, -2p+1)$ für $\varrho = \varrho_p$ eine Doppelwurzel hat, hingegen für $\varrho < \varrho_p$ zwei einfache Wurzeln und für $\varrho > \varrho_p$ überhaupt keine Wurzel.

ϱ_p wird bis auf ein Fehlerglied $O\left(\frac{\log^2 p}{p}\right)$ bestimmt; in erster Annäherung ist

$$\varrho_p = \frac{2p}{\varkappa} + O(\log p),$$

und insbesondere findet man

$$\varrho_p - \varrho_{p-1} = \frac{2}{\varkappa} + O\left(\frac{\log^2 p}{p}\right).$$

Die reellen Nullstellen werden in enge Grenzen eingeschlossen, und dadurch wird die Richtigkeit der folgenden Formel bewiesen, die sowohl in p als auch in ϱ asymptotisch ist: Für die reelle Nullstelle x_p am nächsten an $-p$ gilt

$$x_p = -p + \frac{(-1)^p}{p!\,Q(-p, \varrho)} \cdot \left[1 + O\left(\frac{\log\frac{p}{\varrho}}{p!\,Q(-p, \varrho)}\right)\right].$$

Während der Ausarbeitung der vorliegenden Abhandlung habe ich erfahren, daß Herr Mahler in Göttingen sich mit ähnlichen Fragen beschäftigt und einen Teil meiner Ergebnisse ebenfalls gefunden hat.

In einer weiteren Abhandlung von E. Hille und dem Verfasser soll die Lage der Nullstellen von $P(z, \varrho)$ für beliebige komplexe ϱ, insbesondere für negative ϱ — dann sind sie alle reell — untersucht werden.

§ 2.

Vorbereitende Sätze.

1. Satz I. *Ist p eine hinreichend große positive ganze Zahl, so hat $P(z, \varrho)$ innerhalb des Kreises $|z| = p + \frac{1}{2}$ genau p Nullstellen.*

Beweis. Die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Pole für die Funktion

$$f(z) = z e^{\varrho} \varrho^{-z} P(z, \varrho) \tag{1}$$

innerhalb des genannten Kreises beträgt

$$\left[\log f\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) e^{i\varphi}\right)\right]_0^{2\pi}. \tag{2}$$

Für $\Re z = x \geqq -\frac{5}{2}$ geht aus der Fakultätenreihe

$$P(z, \varrho) = e^{-\varrho} \varrho^{z} \sum_0^{\infty} \frac{\varrho^s}{z(z+1)\dots(z+s)}$$

die Beziehung

$$f(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{3}$$

hervor. In der Halbebene $x \leqq -\frac{5}{2}$ wenden wir die Umformung

$$\begin{aligned} f(z) &= z e^{\varrho} \varrho^{-z} \Gamma(z) - z e^{\varrho} \varrho^{-z} Q(z, \varrho) \\ &= z e^{\varrho} \varrho^{-z} \Gamma(z) + 1 + \frac{\varrho}{z+1} - \frac{e^{\varrho} \varrho^{-z}}{z+1} Q(z+2, \varrho) \end{aligned}$$

an. Aus der Stirlingschen Formel und dem Ergänzungssatze für die Gammafunktion folgt, daß das erste Glied rechts für $|z| = p + \frac{1}{2}$ exponentiell gegen Null strebt. Für das letzte Glied hat man für $x \leqq -\frac{5}{2}$

$$|e^{\varrho} \varrho^{-z} Q(z+2, \varrho)| \leqq e^{\varrho} \varrho^{-x} \int_{\varrho}^{\infty} e^{-t} t^{x+1} dt < \varrho^{-x} \int_{\varrho}^{\infty} t^{x+1} dt = -\frac{\varrho^2}{x+2}.$$

Hiernach gilt (3) auf dem ganzen Kreise $|z| = p + \frac{1}{2}$ für $p \to \infty$, und deshalb ist

$$\log f\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) e^{i\varphi}\right) = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Für hinreichend große p verschwindet also der Ausdruck (2); Satz I ergibt sich dann daraus, daß $f(z)$ Pole nur in $-1, -2, \dots$ hat, die alle einfach sind.

Satz II. *$P(z, \varrho)$ hat unendlich viele reelle Nullstellen, die alle in den Intervallen $J_p: (-2p, -2p+1)$ für $p \geqq$ ein gewisses p_0 liegen. Für $p \geqq$ ein gewisses $p_1 \geqq p_0$ gibt es zwei einfache Nullstellen in jedem J_p. $P(z, \varrho)$ hat höchstens eine endliche Anzahl von imaginären Nullstellen.*

Beweis. Für positive x ist $P(x, \varrho)$ nach der Integraldarstellung (P) positiv, so daß die etwaigen reellen Nullstellen negativ sein müssen. Da

$$P(x, \varrho) = \Gamma(x) - Q(x, \varrho) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-x)} - Q(x, \varrho) \tag{4}$$

und $Q(x, \varrho)$ für alle reellen x positiv ist, fällt $P(x, \varrho)$ in allen Intervallen $(-2p-1, -2p)$ negativ aus, so daß die etwaigen reellen Nullstellen den Intervallen J_p angehören müssen. Aus (4) ersieht man weiterhin, daß $P(x, \varrho)$ in der Nähe der Endpunkte eines jeden J_p positiv ist. Andererseits folgt aus (3)

$$\lim_{p \to \infty} f\left(-2p + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

woraus hervorgeht, daß $P(x, \varrho)$ in allen J_p von einem gewissen Index an auch negativ wird. In ihnen hat also $P(x, \varrho)$ mindestens zwei Nullstellen.

Ist J_{p_0} das erste Intervall, worin eine Nullstelle vorkommt, so finden sich in allen folgenden J_p zwei getrennte Nullstellen. Denn aus der Differenzengleichung

$$P(x+1, \varrho) = x P(x, \varrho) - e^{-\varrho} \varrho^x$$

erhält man

$$P(x-2, \varrho) = \frac{P(x, \varrho) + e^{\varrho} \varrho^{x-2} (\varrho + x - 1)}{(x-1)(x-2)}$$

und entnimmt hieraus: Ist $P(x, \varrho) \leqq 0$, so ist $P(x-2, \varrho) < 0$, wofern $x < 1 - \varrho$ ist; für $x \geqq 1 - \varrho$ aber werden wir im nächsten Satze $P(x, \varrho) \neq 0$ beweisen.

Für den Rest von Satz II braucht man jetzt nur Satz I heranzuziehen.

2. Satz II gibt Anlaß zu drei wichtigen Problemen über die reellen Nullstellen der P-Funktion:

1. *Bestimmung der wirklichen Anzahl der Nullstellen in jedem J_p mit Berücksichtigung der Vielfachheit.*
2. *Angabe von einigermaßen engen Schranken für die Nullstellen.*
3. *Festlegung von p_0 und p_1.*

3. Wir geben zunächst eine recht scharfe Grenze für p_0:

Satz III. *Es ist $P(x, \varrho) > 0$ in J_p für*

$$2p \leqq \varkappa \varrho, \tag{5}$$

wobei $\varkappa = 3{,}59112\ldots$ die positive Wurzel der Gleichung

$$\varkappa \log \varkappa = \varkappa + 1 \tag{6}$$

bedeutet.

Beweis. Nach Schlömilch[11]) hat man

$$\Gamma(x)\,Q(1-x,\varrho)=\int_0^\infty \frac{e^{-\varrho(t+1)}\,t^{x-1}}{t+1}\,dt, \qquad x>0. \tag{7}$$

Für $x=2p+\delta$ und damit $1-x=-2p+1-\delta$ mit $0<\delta<1$ gilt also

$$\Gamma(x)\,Q(1-x,\varrho)=\int_0^\infty e^{-\varrho(t+1)}\,t^{2p}\,\frac{t^{\delta-1}}{t+1}\,dt.$$

Wenn t von 0 bis ∞ läuft, nimmt $e^{-\varrho t}t^{2p}$ seinen größten Wert offenbar für $t=\frac{2p}{\varrho}$ an; daher ist

$$\Gamma(x)\,Q(1-x,\varrho)<e^{-\varrho-2p}\left(\frac{2p}{\varrho}\right)^{2p}\cdot\int_0^\infty\frac{t^{\delta-1}}{t+1}\,dt=e^{-\varrho-2p}\left(\frac{2p}{\varrho}\right)^{2p}\cdot\frac{\pi}{\sin\pi\delta}.$$

Wenn der Faktor zu $\frac{\pi}{\sin\pi\delta}$ in dieser Beziehung $\leqq 1$, d. h.

$$\frac{2p}{\varrho}\log\frac{2p}{\varrho}\leqq\frac{2p}{\varrho}+1$$

ausfällt, ist $P(x,\varrho)$ nach (4) positiv. Die gefundene Ungleichung ist identisch mit (5), da die Gleichung (6), wie leicht nachzuprüfen, nur eine positive Wurzel hat.

Man sieht ohne Mühe ein, daß für eine Nullstelle jedenfalls $x<1-\varkappa\varrho$ gilt. Dann ist aber auch $x<1-\varrho$, womit wir den Beweis für Satz II vervollständigt haben.

4. Wir wenden uns jetzt zu einer recht eingehenden Untersuchung der beiden ersten Ableitungen für die Funktion $\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)$ und ihr Reziprokum, jedoch mit Rücksicht auf Satz III nur für $x+1>\varkappa\varrho$.

Nach der Integraldarstellung (Q) haben wir[12])

$$Q'(-x,\varrho)=\int_\varrho^\infty e^{-t}t^{-x-1}\log t\,dt=Q(-x,\varrho)\log\varrho+\int_\varrho^\infty Q(-x,t)\,\frac{dt}{t}.$$

Nun ist

$$Q(-x,\varrho)=\int_\varrho^\infty e^{-t}t^{-x-1}\,dt<e^{-\varrho}\int_\varrho^\infty t^{-x-1}\,dt=\frac{e^{-\varrho}\,\varrho^{-x}}{x}, \tag{8}$$

[11]) Vgl. z. B. Komp. d. höheren Analysis II, 2. Aufl., Braunschweig 1866, S. 263.

[12]) Wir schreiben der Kürze halber $Q'(x,\varrho)$ und $Q''(x,\varrho)$ für $\frac{\partial Q(x,\varrho)}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 Q(x,\varrho)}{\partial x^2}$.

daher bekommen wir

$$Q'(-x,\varrho) = Q(-x,\varrho)\log\varrho + \frac{\theta}{x}\int_{\varrho}^{\infty} e^{-t}t^{-x-1}\,dt$$

$$= Q(-x,\varrho)\left(\log\varrho + \frac{\theta}{x}\right), \qquad 0<\theta<1.$$

Hieraus geht hervor

$$D_x \log(\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)) = \Psi(x+1) - \log\varrho - \frac{\theta}{x}, \tag{9}$$

wobei wie üblich $\Psi(x) = D_x \log\Gamma(x)$ gesetzt ist. Anwendung der bekannten Formel[13])

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{\theta}{12x^2}, \qquad 0<\theta<1 \tag{10}$$

liefert die Ungleichungen

$$0 < D_x \log(\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)) < \log\frac{x+1}{\varrho} \tag{11}$$

für $x+1>\varkappa\varrho$ und $x>1$. Die letzte folgt aus (9) und (10) unmittelbar, die erste durch einfache Rechnung: $\log\varkappa = 1+\frac{1}{\varkappa} = 1{,}28\ldots$, woraus

$$D_x \log(\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)) = \log\frac{x+1}{\varrho} - \frac{\theta}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{\theta}{12(x+1)^2}$$

$$> 1{,}28\ldots - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{48} > 0.$$

Bei der zweiten Ableitung von $\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)$ brauchen wir nur, daß sie positiv ist, was man durch zweimaliges Differenzieren von (7) erkennt:

$$D_x^2(\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varrho(t+1)}t^x}{t+1}\log^2 t\,dt > 0. \tag{12}$$

Über die erste Ableitung von $1\colon (\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho))$ gibt uns (11) hinreichend Aufschluß.

Für die zweite Ableitung wollen wir beweisen, daß sie für $x+1>\varkappa\varrho$, $x>3$ positiv ist. Zur Abkürzung sei

$$v = \Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)$$

gesetzt. Dann ist

$$v' = \Gamma(x+1)[\Psi(x+1)\,Q(-x,\varrho) - Q'(-x,\varrho)],$$

$$v'' = \Gamma(x+1)[(\Psi'(x+1) + (\Psi(x+1))^2)\,Q(-x,\varrho)$$

$$- 2\Psi(x+1)\,Q'(-x,\varrho) + Q''(-x,\varrho)].$$

[13]) Vgl. z. B. N. Nielsen, Gammafunktion, S. 209.

Unser Ziel ist, das Vorzeichen von

$$\left(\frac{1}{v}\right)'' = \frac{2v'^2 - v\,v''}{v^3}$$

zu bestimmen. Zur größeren Übersichtlichkeit schreiben wir nur Γ, Q usw. an Stelle von $\Gamma(x+1)$, $Q(-x, \varrho)$ usw. Eine einfache Rechnung lehrt

$$2v'^2 - v\,v'' = \Gamma^2[(\Psi Q - Q')^2 - \Psi' Q^2 + Q'^2 - Q\,Q'']. \tag{13}$$

Um darzutun, daß die Klammer positiv ist, verschaffen wir uns eine obere Schranke für die (positive) Größe $Q\,Q'' - Q'^2$. Wegen

$$\frac{\partial(Q\,Q'' - Q'^2)}{\partial \varrho} = -e^{-\varrho}\varrho^{-x-1}[Q'' - 2\log\varrho\,Q' + \log^2\varrho\,Q]$$

$$= -e^{-\varrho}\varrho^{-x-1}\int_{\varrho}^{\infty} e^{-t}t^{-x-1}\log^2\frac{t}{\varrho}\,dt = -\varrho^{-2x-1}\int_{1}^{\infty} e^{-\varrho(t+1)}t^{-x-1}\log^2 t\,dt$$

gilt

$$\begin{aligned} Q\,Q'' - Q'^2 &= \int_{\varrho}^{\infty} u^{-2x-1}\,du \int_{1}^{\infty} e^{-u(t+1)}t^{-x-1}\log^2 t\,dt \\ &= \int_{1}^{\infty} t^{-x-1}\log^2 t\,dt \int_{\varrho}^{\infty} e^{-u(t+1)}u^{-2x-1}\,du \\ &= \int_{1}^{\infty} (t+1)^{2x}t^{-x-1}\log^2 t\cdot Q(-2x, \varrho(t+1))\,dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Nach (8) ist deshalb

$$Q\,Q'' - Q'^2 < \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-2x}}{2x}\int_{1}^{\infty} e^{-\varrho t}t^{-x-1}\log^2 t\,dt = \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{x}\int_{1}^{\infty} Q(-x, \varrho t)\frac{\log t}{t}\,dt;$$

jetzt benutzen wir wieder (8) und gewinnen die Majorante

$$\frac{e^{-\varrho}\varrho^{-2x}}{x^2}\int_{1}^{\infty} e^{-\varrho t}t^{-x-1}\log t\,dt = \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{x^2}\int_{1}^{\infty} Q(-x, \varrho t)\frac{dt}{t}$$

$$< \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-2x}}{x^3}\int_{1}^{\infty} e^{-\varrho t}t^{-x-1}\,dt.$$

Hiermit haben wir

$$Q\,Q'' - Q'^2 < \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{x^3}\cdot Q.$$

Die Größe links soll mit Q^2 verglichen werden; deshalb ermitteln wir noch eine untere Schranke von $Q(-x, \varrho)$. Gemäß der Differenzengleichung

$$Q(x+1, \varrho) = x\,Q(x, \varrho) + e^{-\varrho}\varrho^x$$

und (8) ist

$$Q(-x, \varrho) = \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{x} - \frac{Q(-x+1, \varrho)}{x} \geqq \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{x}\left(1 - \frac{\varrho}{x-1}\right).$$

Nun bleibt nach Annahme $\frac{\varrho}{x+1} < 0{,}28$ und $\frac{x+1}{x-1} \leqq 2$, also $\frac{\varrho}{x-1} < 0{,}56$. Dies führt zu

$$Q(-x, \varrho) > 0{,}44 \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{x} = \frac{e^{-\varrho}\varrho^{-x}}{2{,}27\,x}. \tag{15}$$

Damit ist die gewünschte Ungleichung

$$Q\,Q'' - Q'^2 < \frac{2{,}27}{x^2} Q^2 \tag{16}$$

erreicht.

Wir können jetzt die rechte Seite in (13) hinreichend scharf abschätzen. (9) und (10) liefern

$$\Psi - \frac{Q'}{Q} > \Psi(x+1) - \log\varrho - \frac{1}{x} > \log\frac{x+1}{\varrho} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{12(x+1)^2}$$
$$> \log x - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12\cdot 4^2} = 0{,}82;$$

hieraus entspringt

$$\left(\Psi - \frac{Q'}{Q}\right)^2 > 0{,}67.$$

$\Psi'(x+1)$ ist eine für positive x abnehmende Funktion und daher

$$\Psi'(x+1) \leqq \Psi'(4) = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = 0{,}28.$$

Schließlich lehrt (16)

$$D_x^2 \log Q(-x, \varrho) < \frac{2{,}27}{x^2} \leqq \frac{2{,}27}{9} = 0{,}25.$$

Mithin haben wir

$$\Psi'(x+1) + D_x^2 \log Q(-x, \varrho) < 0{,}53 < 0{,}67 < \left(\Psi - \frac{Q'}{Q}\right)^2.$$

Hieraus folgt, daß die rechte Seite in (13) positiv ist, d. h.

$$D_x^2 \frac{1}{\Gamma(x+1)\,Q(-x, \varrho)} > 0, \tag{17}$$

wie behauptet.

§ 3.

Allgemeine Eigenschaften der Nullstellen.

1. Es ist jetzt leicht das erste der drei Probleme zu lösen, die wir uns in § 2, 2 stellten.

Satz IV. *Jedem positiven ϱ entspricht eine positive ganze Zahl $p(\varrho)$ derart, daß in jedem J_p mit $p \geqq p(\varrho)$ genau zwei einfache Nullstellen liegen. Für $p = p(\varrho)$ können sie in eine doppelte Nullstelle zusammenfallen. Weitere reelle Nullstellen gibt es nicht. Die Anzahl der imaginären Nullstellen beträgt $2p(\varrho) - 2$.*

Beweis. Eine reelle Nullstelle von $P(x, \varrho)$ kann nach (4) als ein Schnittpunkt zwischen der Kurve

$$y = \frac{\sin \pi x}{\pi} - \frac{1}{\Gamma(1-x)\, Q(x, \varrho)} \tag{18}$$

und der reellen Achse aufgefaßt werden. Nach (17) ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\pi \sin \pi x - D_x^2 \frac{1}{\Gamma(1-x)\, Q(x, \varrho)} < 0,$$

wenn x sich in einem J_p mit $2p > \varkappa \varrho$ und $p \geqq 2$ befindet. In diesen Intervallen ist die Kurve (18) also hohl nach unten, so daß sie in jedem solchen J_p höchstens zwei einfache Schnittpunkte oder einen Berührungspunkt mit der Achse haben kann. Liegt in J_1 eine Nullstelle, so müssen nach Satz II alle J_p Nullstellen enthalten, und diese müssen nach Satz I sämtlich einfach sein. Übrigens gibt es in diesem Falle keine imaginären Nullstellen.

Hieraus geht hervor, daß $P(x, \varrho)$ in jedem J_p mit $p \geqq p_0$ (vgl. Satz II) genau zwei Nullstellen hat. Nach Satz II enthält aber jedes J_p mit $p \geqq p_0 + 1$ mindestens zwei getrennte Nullstellen und deshalb können keine doppelten reellen Nullstellen außer in J_{p_0} auftreten. Man hat also $p(\varrho) = p_0$ und p_1 entweder gleich $p(\varrho)$ oder gleich $p(\varrho) + 1$.

2. Satz V. *Wird mit*

$$x_p = -p + (-1)^p \delta_p \tag{19}$$

die am nächsten an $-p$ $(p \geqq p(\varrho))$ *gelegene reelle Nullstelle bezeichnet, so ist* δ_p *bei festem* ϱ *eine positive, monoton abnehmende Funktion von* p *mit* $\delta_p \to 0$ *für* $p \to \infty$. δ_p *bleibt immer* $< \frac{1}{2}$ *außer etwa für* $p = 2p(\varrho) - 1$.

Beweis. Wir betrachten die x_p als Schnittpunkte zwischen den Kurven

$$y = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{20}$$

und

$$y = \Gamma(1-x)\, Q(x, \varrho). \tag{21}$$

Wir brauchen nur die Zweige der Kurve (20) oberhalb der negativen Achse. Der Zweig im Streifen $-2p < x < -2p+1$ fällt offenbar für $-2p < x < -2p + \frac{1}{2}$ und steigt für $-2p + \frac{1}{2} < x < -2p + 1$. Die Kurve (21) nimmt infolge (11) für $x + 1 > \varkappa \varrho$ beständig ab, und für kleinere x wissen wir von vornherein, daß sich die Kurven nicht schneiden können. Eine einfache geometrische Betrachtung erweist nunmehr die Richtigkeit des Satzes V.

Satz VI. δ_p *ist bei festem* p *eine wachsende Funktion von* ϱ, *und für* $\varrho \to 0$ *geht* $\delta_p \to 0$. *Für* $\varrho =$ *einem gewissen* ϱ_p *fallen die zwei Nullstellen im Intervall zusammen, für* $\varrho > \varrho_p$ *enthält dieses keine Nullstellen.*

Beweis. Wir untersuchen die Änderung der Kurve

$$y = P(x, \varrho) \tag{22}$$

mit ϱ, wenn x in einem von ϱ unabhängigen J_p gehalten wird. Bei sehr großem ϱ trifft die Kurve die negative Achse nicht, weil bei festem x

$$P(x, \varrho) = \Gamma(x) - Q(x, \varrho) \to \Gamma(x) \quad \text{für} \quad \varrho \to \infty .$$

Für sehr kleine ϱ gibt es zwei Schnittpunkte, welche nach Satz IV einfach sein müssen, denn man hat

$$\varrho^{-x} P(x, \varrho) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\varrho^s}{x+s} \to \frac{1}{x} < 0 \quad \text{für} \quad \varrho \to 0, \quad x \text{ fest}.$$

Hieraus folgt einerseits $\delta_{2p} \to 0$ und $\delta_{2p-1} \to 0$ für $\varrho \to 0$, andererseits, daß ein oder mehrere Werte von ϱ vorhanden sind, für welche die Kurve (22) die negative Achse innerhalb J_p berührt. Ist nun $P(x_0, \varrho_0) = 0$, so gilt nach dem Mittelwertsatze

$$P(x_0, \varrho) = (\varrho - \varrho_0)\, e^{-\varrho_1} \varrho_1^{x_0},$$

wobei ϱ_1 zwischen ϱ und ϱ_0 liegt. Hieraus ist zu entnehmen, daß $P(x_0, \varrho) < 0$ bleibt für alle positiven $\varrho < \varrho_0$; für diese ϱ hat also $P(x, \varrho)$ zwei getrennte Nullstellen in J_p. Hiermit ist der Beweis vollendet.

§ 4.

Schranken für die reellen Nullstellen.

1. Wir gehen jetzt über zur Lösung des zweiten Problems aus § 2, 2, Schranken für die reellen Nullstellen anzugeben.

Die Gleichung $P(x, \varrho) = 0$ mit $x = -p + (-1)^p \delta_p$ kann geschrieben werden:

$$\sin \pi \delta_p = \frac{\pi}{\Gamma(p+1-(-1)^p \delta_p)\, Q(-p+(-1)^p \delta_p, \varrho)} \tag{23}$$

oder

$$\delta_p = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\pi}{\Gamma(p+1-(-1)^p \delta_p)\, Q(-p+(-1)^p \delta_p, \varrho)} \tag{23a}$$

und soll mittels der für $0 < x < 1$ gültigen Ungleichungen

$$x < \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots < x + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x^2} < \frac{x}{1-x} \tag{24}$$

untersucht werden.

Wir denken uns zunächst p ungerade und ersetzen p durch $2p-1$. Die erste Ungleichung in (24) gibt

$$\delta_{2p-1} > \frac{1}{\Gamma(2p+\delta_{2p-1})\, Q(-2p+1-\delta_{2p-1}, \varrho)} .$$

Wir führen die Abkürzung

$$\vartheta_p = \frac{1}{\Gamma(p+1)\,Q(-p,\varrho)} \tag{25}$$

ein und erhalten nach (17) und (11)

$$\delta_{2p-1} > \vartheta_{2p-1} - \log\frac{2p}{\varrho}\,\vartheta_{2p-1}\,\delta_{2p-1},$$

also

$$\delta_{2p-1} > \frac{\vartheta_{2p-1}}{1+\vartheta_{2p-1}\log\frac{2p}{\varrho}}. \tag{26}$$

Aus der zweiten Ungleichung in (24) läßt sich

$$\delta_{2p-1} < \frac{1}{\Gamma(2p+\delta_{2p-1})\,Q(-2p+1-\delta_{2p-1},\varrho)-\pi}$$

gewinnen. Der Nenner ist nach (11) eine wachsende Funktion von δ_{2p-1}, woraus folgt

$$\delta_{2p-1} < \frac{\vartheta_{2p-1}}{1-\pi\,\vartheta_{2p-1}}. \tag{27}$$

Zweitens nehmen wir p gerade und schreiben in (23) $2p$ statt p. Es gilt

$$\delta_{2p} > \frac{1}{\Gamma(2p+1-\delta_{2p})\,Q(-2p+\delta_{2p},\varrho)}.$$

Der Nenner ist eine abnehmende Funktion von δ_{2p}, so daß wir

$$\delta_{2p} > \vartheta_{2p} \tag{28a}$$

bekommen. (17) in Verbindung mit (9) und (10) liefert übrigens die schärfere Ungleichung

$$\delta_{2p} > \vartheta_{2p} + \left(\Psi(2p+1) - \log\varrho - \frac{\theta}{2p}\right)\vartheta_{2p}\,\delta_{2p} > \vartheta_{2p} + \log\frac{2p-1}{\varrho}\,\vartheta_{2p}\,\delta_{2p},$$

woraus

$$\delta_{2p} > \frac{\vartheta_{2p}}{1-\vartheta_{2p}\log\frac{2p-1}{\varrho}} \tag{28}$$

entfließt.

Die obere Schranke für δ_{2p} hinreichend scharf zu erhalten, ist etwas schwieriger. Nach (24) besteht die Ungleichung

$$\delta_{2p} < \frac{1}{\Gamma(2p+1-\delta_{2p})\,Q(-2p+\delta_{2p},\varrho)-\pi}$$

und, weil die zweite Ableitung des Nenners nach δ_{2p} gemäß (12) positiv ist, die weitere

$$\delta_{2p} < \frac{\vartheta_{2p}}{1-\delta_{2p}\log\frac{2p+1}{\varrho}-\pi\,\vartheta_{2p}} \tag{29}$$

(vgl. (11)). Sie kann auch

$$\delta_{2p} < \frac{\vartheta_{2p}}{1-\pi\vartheta_{2p}} + \frac{\log\frac{2p+1}{\varrho}}{1-\pi\vartheta_{2p}}\,\delta_{2p}^2 \tag{29a}$$

geschrieben werden. Nun haben wir $\delta_{2p} < \frac{1}{2}$ (Satz V); wird (23) in die Form

$$\delta_{2p} = \frac{\pi\delta_{2p}}{\sin\pi\delta_{2p}}\cdot\frac{1}{\Gamma(2p+1-\delta_{2p})\,Q(-2p+\delta_{2p},\varrho)}$$

gebracht, so erhält man demnach die Ungleichung

$$\delta_{2p} < \frac{\pi}{2}\vartheta_{2p-\frac{1}{2}},$$

weil $1:\Gamma Q$ eine wachsende Funktion von δ_{2p} darstellt. Aus (29) folgt hiermit

$$\delta_{2p} < \frac{\vartheta_{2p}}{1-\frac{\pi}{2}\vartheta_{2p-\frac{1}{2}}\log\frac{2p+1}{\varrho}-\pi\vartheta_{2p}}.$$

Diese Ungleichung ist noch nicht ganz von der gewünschten Größenordnung; tragen wir sie jedoch in (29a) ein, so bekommen wir was wir brauchen:

$$\begin{aligned}\delta_{2p} &< \frac{\vartheta_{2p}}{1-\pi\vartheta_{2p}} + \frac{\log\frac{2p+1}{\varrho}}{1-\pi\vartheta_{2p}}\,\frac{\vartheta_{2p}^2}{\left(1-\frac{\pi}{2}\vartheta_{2p-\frac{1}{2}}\log\frac{2p+1}{\varrho}-\pi\vartheta_{2p}\right)^2} \\ &< \frac{\vartheta_{2p}}{1-\pi\vartheta_{2p}}\cdot\left[1+\frac{\vartheta_{2p}\log\frac{2p+1}{\varrho}}{1-\pi\vartheta_{2p-\frac{1}{2}}\log\frac{2p+1}{\varrho}-2\pi\vartheta_{2p}}\right].\end{aligned} \tag{30}$$

Der Grund dafür, daß wir hier die Annäherung so weit getrieben haben, ist der, daß erst (31) in Verbindung mit (26), (27) und (28) die asymptotische Formel

$$\delta_p = \vartheta_p\left(1+O\left(\vartheta_p\log\frac{p}{\varrho}\right)\right) \tag{31}$$

liefert.

Die Herleitung der gefundenen Ungleichungen setzt natürlich voraus, daß alle auftretenden Nenner positiv sind. Wir werden später zeigen, daß dies jedenfalls für große ϱ wirklich stattfindet, abgesehen vom Falle $p = p(\varrho)$.

2. Die Formel (31) wird dadurch besonders interessant, daß das Glied $O\left(\vartheta_p\log\frac{p}{\varrho}\right)$ absolut genommen kleiner als $C\cdot\vartheta_p\log\frac{p}{\varrho}$ ausfällt, *wobei C eine sowohl von p als auch von ϱ unabhängige Konstante ist.*

Aus der Formel § 5, 2 (38) geht hervor, daß

$$\vartheta_p = e^{p+\varrho}\left(\frac{\varrho}{p}\right)^p \frac{p+\varrho}{\sqrt{2\pi p}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right).$$

Wenn

$$\varrho \leqq \frac{p}{\varkappa}(1-\delta) \quad \text{mit } \delta > 0$$

bleibt, so findet man hieraus durch eine einfache Rechnung

$$\vartheta_p = O(\varkappa^{-p\delta}).$$

In diesem Fall hat man also

$$\delta_p = \vartheta_p \cdot (1 + O(\varkappa^{-p\delta})) \tag{31a}$$

und somit für die reelle Nullstelle x_p, die $-p$ am nächsten liegt,

$$x_p = -p + (-1)^p \cdot \frac{1 + O(\varkappa^{-p\delta})}{p!\, Q(-p, \varrho)}. \tag{32}$$

Hierin ist enthalten sowohl

$$x_p = -p + (-1)^p \frac{e^\varrho \varrho^p}{(p-1)!} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right), \quad \varrho \text{ fest}, \ p \to \infty, \tag{32a}$$

welche Formel für $\varrho = 1$ von Walther [7]) angegeben ist und in einer späteren Abhandlung von E. Hille und dem Verfasser zur Geltung für komplexes ϱ erweitert wird, als auch

$$x_p = -p + (-1)^p e^{p+\varrho}\left(\frac{\varrho}{p}\right)^p \sqrt{\frac{(p+\varrho)^2}{2\pi p}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right), \quad \varrho \leqq \frac{p}{\varkappa}(1-\delta), \tag{32b}$$

welche Formel für $(\varkappa + \delta)\varrho \leqq p \leqq C\varrho$ von K. Mahler gefunden ist.

Eine Formel von dieser letzteren Gestalt gilt aber nicht für die nahe an $J_{p(\varrho)}$ liegenden Nullstellen. Aus den Ergebnissen in § 5, besonders aus (42) und (48), geht übrigens hervor, daß die Abschätzung

$$\delta_p = \vartheta_p \cdot (1 + o(1)) \tag{31b}$$

für solche Nullstellen gilt, die sich mit wachsendem p ins Unendliche von $J_{p(\varrho)}$ entfernen.

§ 5.

Festlegung von $p(\varrho)$.

1. Es bleibt jetzt nur noch übrig, das dritte Problem zu lösen: Festlegung von $p(\varrho)$ (vgl. Satz IV). Eine erste Annäherung erhalten wir durch

Satz VII. *Notwendig dafür, daß $P(z, \varrho)$ eine Nullstelle in J_p hat, ist $\vartheta_{2p} < \frac{1}{2}$, hinreichend $\vartheta_{2p-\frac{1}{2}} < \frac{1}{\pi}$.*

Beweis. Wegen $\delta_{2p} < \frac{1}{2}$ können keine Nullstellen in J_p liegen, wofern

$$\delta < \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\pi}{\Gamma(2p+1-\delta)\, Q(-2p+\delta, \varrho)}$$

ausfällt für jedes δ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$. Die rechte Seite ist $> \vartheta_{2p}$ nach dem Beweise für (28a); wenn also $\delta < \vartheta_{2p}$ für $0 < \delta < \frac{1}{2}$, d. h. $\vartheta_{2p} \geqq \frac{1}{2}$ ist, kann $P(z, \varrho)$ in J_p keine Nullstellen haben. Das gibt die notwendige Bedingung.

Wenn andererseits

$$\delta \geqq \frac{\pi\delta}{\sin \pi\delta} \cdot \frac{1}{\Gamma(2p+1-\delta)\, Q(-2p+\delta, \varrho)}$$

für irgendein δ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ wird, so hat $P(z, \varrho)$ eine Nullstelle in J_p. Nun ist die rechte Seite dieser Ungleichung nicht größer als ihr Wert für $\delta = \frac{1}{2}$. Die Ungleichung ist also erfüllt, wofern $\delta \geqq \frac{\pi}{2} \vartheta_{2p-\frac{1}{2}}$ ausfällt für irgendein δ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, insbesondere für $\delta = \frac{1}{2}$. Hiermit ist der Satz bewiesen.

2. In erster Annäherung handelt es sich somit darum, eine Ungleichung von der Form

$$\Gamma(x+1)\, Q(-x, \varrho) > c \tag{33}$$

mit $c > 1$ zu befriedigen. Wir wissen (vgl. (11)), daß für Werte von x, die in Betracht kommen können, die linke Seite eine wachsende Funktion von x ist. Daher wird (33) durch $x > \xi$ gelöst, wenn ξ die größte positive Lösung zu

$$\Gamma(x+1)\, Q(-x, \varrho) = c \tag{34}$$

bedeutet.

Um die Gleichung (34) zu lösen, müssen wir eine wesentlich schärfere Majorante für $Q(-x, \varrho)$ als (8) haben. Wir setzen

$$\varphi(\varrho) = e^{\varrho}\, \varrho^{x}\, Q(-x, \varrho) = \int_0^{\infty} e^{-\varrho t} (1+t)^{-x-1}\, dt \tag{35}$$

und bemerken sofort

$$\varphi'(\varrho) < 0, \qquad \varphi''(\varrho) > 0. \tag{36}$$

Weiterhin findet man leicht die Differentialgleichung

$$(\varrho + x)\varphi(\varrho) = 1 + \varrho\, \varphi'(\varrho), \tag{37}$$

welche in Verein mit (36) die Abschätzung nach oben

$$\varphi(\varrho) < \frac{1}{\varrho - x}$$

liefert.

Durch Differenzieren von (37) nach ϱ findet man

$$\varphi(\varrho)+(\varrho+x)\varphi'(\varrho)=\varrho\varphi''(\varrho)+\varphi'(\varrho).$$

Hieraus entfernen wir mit Hilfe von (37) die Ableitung $\varphi'(\varrho)$, lösen die entstehende Gleichung nach $\varphi(\varrho)$ auf:

$$\varphi(\varrho)=\frac{\varrho+x-1+\varrho^2\varphi''(\varrho)}{(\varrho+x)^2-x}$$

und erhalten gemäß (36) die Abschätzung nach unten

$$\varphi(\varrho)>\frac{\varrho+x-1}{(\varrho+x)^2-x}.$$

Die Differenz zwischen den beiden Schranken beträgt

$$\frac{\varrho}{(\varrho+x)[(\varrho+x)^2-x]}.$$

Daher haben wir

$$(38)\quad e^{\varrho}\varrho^{x}Q(-x,\varrho)=\varphi(\varrho)=\frac{1}{\varrho+x}\left(1-\frac{\theta\varrho}{(\varrho+x)^2-x}\right)=\frac{1}{\varrho+x}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho+x}\right)\right)$$

mit $0<\theta<1$.

Benutzt man dies und die Stirlingsche Formel in (34), so ergibt sich

$$(39)\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x-\varrho-x\log\varrho-\log(\varrho+x)+\log\sqrt{2\pi}=\log c+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\frac{x}{\varrho}$ für $\varrho\to\infty$ weder gegen 0 noch gegen ∞ gehen kann, sowie davon, daß ein Häufungspunkt α der Werte von $\frac{x}{\varrho}$ die Gleichung $\alpha\log\alpha=\alpha+1$ befriedigen muß. D. h. es muß

$$(40)\qquad \lim\frac{x}{\varrho}=\varkappa$$

sein, wobei $\varkappa$ die in Satz III eingeführte Zahl bedeutet[14]).

Wird mit Rücksicht auf (40)

$$(41)\qquad \frac{x}{\varrho}=\varkappa(1+\varepsilon)$$

gesetzt, so können wir (39) in die Gestalt

$$[\varepsilon\log\varkappa-\varepsilon+\log(1+\varepsilon)]\varkappa\varrho-\frac{1}{2}\log\varrho+\varkappa\varepsilon\varrho\log(1+\varepsilon)+\frac{1}{2}\log(1+\varepsilon)$$

$$+\frac{1}{2}\log\varkappa-\log(1+\varkappa)-\log\left(1+\frac{\varkappa\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)+\log\sqrt{2\pi}=\log c+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

bringen. Da offenbar $\varepsilon=O\left(\frac{\log\varrho}{\varrho}\right)$ ist, läßt sich die Gleichung ver-

[14]) Hieraus geht übrigens hervor, daß die in Satz III angeführte Schranke in erster Annäherung die bestmögliche ist.

einfachen zu

$$\varrho\varepsilon\cdot\varkappa\log\varkappa-\tfrac{1}{2}\log\varrho+\tfrac{1}{2}\log\varkappa-\log(1+\varkappa)+\log\sqrt{2\pi}=\log c+O\left(\frac{\log^2\varrho}{\varrho}\right).$$

Hieraus geht hervor

$$\varepsilon=\frac{\log\sqrt{\varrho}+\log\dfrac{\varkappa+1}{\sqrt{2\pi\varkappa}}+\log c}{\varrho\varkappa\log\varkappa}+O\left(\frac{\log^2\varrho}{\varrho^2}\right).$$

Nach (41) ist daher

$$x=\varkappa\varrho+\frac{\log\sqrt{\varrho}+\log\dfrac{(\varkappa+1)c}{\sqrt{2\pi\varkappa}}}{\log\varkappa}+O\left(\frac{\log^2\varrho}{\varrho}\right). \tag{42}$$

Dieses x hängt außer von ϱ offenbar auch von c ab, was wir durch die Bezeichnung $x(c)$ andeuten. Satz VII lehrt

$$[x(2)]+1\leqq 2p(\varrho)\leqq\left[x(\pi)+\tfrac{1}{2}\right]+1. \tag{43}$$

Wegen $x(\pi)+\frac{1}{2}-x(2)\approx 0{,}85$ ist $p(\varrho)$ für große ϱ durch (43) oft, aber nicht immer eindeutig bestimmt.

3. Vollständig kann das Problem dadurch gelöst werden, daß man zuerst das in Satz VI definierte ϱ_p für große p bestimmt. Für $\varrho=\varrho_p$ soll $x=2p-\delta_{2p}$ den beiden Gleichungen

$$\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)=\frac{\pi}{\sin\pi\delta_{2p}}, \tag{44}$$

$$\Psi(x+1)-\frac{Q'(-x,\varrho)}{Q(-x,\varrho)}=\pi\cot\pi\delta_{2p} \tag{45}$$

genügen. Der letzten Gleichung läßt sich nach (9) auch die Gestalt

$$\log\frac{x}{\varrho}=\pi\cot\pi\delta_{2p}+O\left(\frac{1}{p}\right)$$

geben. Nun ist nach dem Früheren

$$\frac{x}{\varrho}=\varkappa+O\left(\frac{\log p}{p}\right),$$

so daß (45) dasselbe aussagt wie

$$\pi\cot\pi\delta_{2p}=\log\varkappa+O\left(\frac{\log p}{p}\right).$$

Hieraus folgt einmal, daß δ_{2p} für $p\to\infty$ gegen einen bestimmten Grenzwert $\delta\approx 0{,}376994$, die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$\pi\cot\pi\delta=\log\varkappa, \tag{46}$$

konvergiert, zum anderen

$$\delta_{2p}=\delta+O\left(\frac{\log p}{p}\right). \tag{47}$$

Dieser Wert von δ_{2p} wird in die Gleichung (44) eingetragen, die sich hierdurch in

$$\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)=\frac{\pi}{\sin\pi\delta}\left(1+O\left(\frac{\log p}{p}\right)\right) \tag{44a}$$

abändert. Nach (42) gilt also

$$2p-\delta=\varkappa\varrho_p+\frac{\log\sqrt{\varrho_p}}{\log\varkappa}+\frac{\log\frac{\varkappa+1}{\sqrt{2\pi\varkappa}}+\log\frac{\pi}{\sin\pi\delta}}{\log\varkappa}+O\left(\frac{\log^2\varrho_p}{\varrho_p}\right), \tag{48}$$

woraus durch einfache Rechnung

$$\varrho_p=\frac{2p-\delta}{\varkappa}-\frac{\log\sqrt{p}}{\varkappa+1}-\frac{\log\frac{\sqrt{\pi}\log\varkappa}{\sin\pi\delta}}{\varkappa+1}+O\left(\frac{\log^2 p}{p}\right) \tag{49}$$

entsteht. Hieraus entnimmt man

$$\varrho_p-\varrho_{p-1}=\frac{2}{\varkappa}+O\left(\frac{\log^2 p}{p}\right). \tag{50}$$

Es ist nun leicht, das einem beliebig großen ϱ entsprechende $p(\varrho)$ zu bestimmen. Nach (50) ist nämlich

$$\varrho_{p(\varrho)}=\varrho+\frac{2\theta}{\varkappa}+O\left(\frac{\log^2\varrho}{\varrho}\right),\qquad 0\leqq\theta<1.$$

Das in (48) eingehende p ist offenbar $p(\varrho_p)=p(\varrho)$. Daher

$$p(\varrho)=\frac{\varkappa}{2}\varrho+\frac{\delta}{2}+\frac{\log\sqrt{\varrho}}{2\log\varkappa}+\frac{\log\frac{\varkappa+1}{\sqrt{2\pi\varkappa}}+\log\frac{\pi}{\sin\pi\delta}}{2\log\varkappa}+\theta+O\left(\frac{\log^2\varrho}{\varrho}\right) \tag{48a}$$

mit $0\leqq\theta<1$. Hiermit ist $p(\varrho)$ für große ϱ eindeutig bestimmt, außer wenn etwa die rechte Seite in (48a), abgesehen von $\theta+O\left(\frac{\log^2\varrho}{\varrho}\right)$, sehr nahe an einer ganzen Zahl liegt; in diesem Ausnahmefalle ist $p(\varrho)$ entweder gleich dieser ganzen Zahl oder eine Einheit größer.

4. Die eben gefundenen Ergebnisse liefern uns ein einfaches Mittel, die Untersuchung in § 4 dahin zu vervollständigen, daß für hinreichend große ϱ und $p>p(\varrho)$ alle Nenner in den aufgestellten Ungleichungen positiv sind.

Nach (39) gilt

$$\log\frac{\Gamma(x+h+1)\,Q(-x-h,\varrho)}{\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)}=h\log\frac{x}{\varrho}+O\left(\frac{h}{x}\right),$$

also für beschränktes h und x in $J_{p(\varrho)}$

$$\frac{1}{\Gamma(x+h+1)\,Q(-x-h,\varrho)}=\frac{x^{-h}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\Gamma(x+1)\,Q(-x,\varrho)}. \tag{51}$$

Für $\varrho_{p-1} < \varrho \leqq \varrho_p$ fällt $Q(-x, \varrho) \geqq Q(-x, \varrho_p)$ aus. Wird in (51) $x = -2p(\varrho) + \delta_{2p(\varrho)}$ gesetzt, so wird die rechte Seite kleiner als das, was wir bei Erstatten von ϱ mit $\varrho_{p(\varrho)}$ erhalten. Nach (44a) haben wir also

$$\frac{1}{\Gamma(x+h+1)\,Q(-x-h,\varrho)} < \frac{\sin \pi\delta}{\pi} \cdot \varkappa^{-h}\left(1 + O\left(\frac{\log p}{p}\right)\right).$$

Aus der Definition von δ geht indessen

$$\frac{\pi}{\sin \pi\delta} = \tfrac{1}{2}\pi^2 + \log^2 \varkappa \approx 3{,}4$$

hervor, was die Ungleichung

$$\frac{1}{\Gamma(x+h+1)\,Q(-x-h,\varrho)} < \frac{1}{3\varkappa^h}\left(1 + O\left(\frac{\log p}{p}\right)\right) \tag{51a}$$

nach sich zieht.

Sowohl ϑ_p als auch $\vartheta_p \log \frac{p}{\varrho}$ sind abnehmende Funktionen von p; für ϑ_p folgt dies aus (11) und für $\vartheta_p \log \frac{p}{\varrho}$ durch Differenzieren nach p und Benutzung von (9) und (10). Es genügt also zu zeigen, daß die fraglichen Nenner für $p = p(\varrho) + 1$ positiv sind. Das aber läßt sich unter Anwendung von (51a) leicht nachrechnen.

(Eingegangen am 28. Oktober 1927.)

Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z, \varrho)$.

II. Geometrisches über die Nullstellen.

Von

Einar Hille in Princeton, N. J., und G. Rasch in Kopenhagen.

§ 1.

Einleitung.

1. In einer früheren Arbeit[1]) hat der eine von uns das Nullstellenproblem für die unvollständige Gammafunktion

$$(P) \qquad P(z, \varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\varrho^{z+m}}{z+m}$$

in Angriff genommen. Damals handelte es sich im wesentlichen um die reellen Nullstellen der Funktion $P(z, \varrho)$ für reelle positive ϱ.

In der gegenwärtigen Arbeit werden etwas allgemeinere Fragen behandelt. Wir lassen für ϱ auch komplexe Werte zu und studieren die Verteilung der Nullstellen von $P(z, \varrho)$ in der z-Ebene für ein beliebiges festes ϱ.

2. Von der Verteilung der Nullstellen erhalten wir dabei folgendes Bild. Es sei ϱ gegeben; dann kann man eine positive Zahl $N = N(\varrho)$ bestimmen, so daß jeder Kreis $|z| = n + \frac{1}{2}$ mit $n \geqq N(\varrho)$ genau n Nullstellen von $P(z, \varrho)$ enthält, also ebenso viele Nullstellen wie Pole von $z\,P(z, \varrho)$. Jedem Pol von $z\,P(z, \varrho)$ können wir eine Nullstelle zuordnen, und zwar kann diese Zuordnung so geschehen, daß der Abstand zwischen dem Pol $z = -n$ und der zugehörigen Nullstelle kleiner als ε ausfällt, wenn $n \geqq n(\varrho, \varepsilon)$. Wenn $|\varrho|$ genügend klein ist, können wir $N(\varrho)$ gleich 1

[1]) G. Rasch, Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion. I., Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 300–318. — Wir verweisen auf diese Arbeit für Literaturangaben, Bezeichnungen u. dgl.

setzen; dafür ist $|\varrho| \leqq \frac{1}{4}$ hinreichend. Weiter wächst $N(\varrho)$ unbeschränkt mit $|\varrho|$. Wenn ε fest positiv genommen wird, so kann man $|\varrho|$ so klein wählen, daß $n(\varrho, \varepsilon) = 1$ ausfällt. Also, für genügend kleine $|\varrho|$ liegt jede Nullstelle nahe dem zugeordneten Pole; wenn $\varrho|$ nicht mehr klein angenommen wird, trifft das nicht für jede Nullstelle zu, aber es gibt nur endlich viele Ausnahmen. Überhaupt kann der Abstand zwischen einem Pol und der zugehörigen Nullstelle nicht den Betrag $C|\varrho|$ übertreffen, wo C eine gewisse Konstante ist. Diese Eigenschaften der Nullstellenverteilung sind charakteristisch für Funktionen, die sich in beständig konvergierende Fakultätenreihen

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, b_n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

mit $b_0 = 1$ und $|b_n| \leqq b^n$ für genügend große n, wo $b < \frac{1}{2}$, entwickeln lassen.

3. In § 2 der Arbeit erledigen wir ziemlich vollständig den Spezialfall, daß ϱ reell und negativ ist. Hierauf folgt in § 3 der allgemeine Verteilungssatz für die Nullstellen, den wir als den Lemniskatensatz bezeichnen, da eine Familie von Lemniskaten höherer Ordnung uns die gewünschte Einengung der Nullstellen liefert. Solche Lemniskatensätze gelten auch für die oben erwähnte Klasse von Fakultätenreihen. An diesen Satz schließen sich in § 4 weitere ähnliche Sätze an, die nullstellenfreie Halbebenen u. dgl. angeben.

§ 2.

Reelle negative Werte von ϱ.

1. Für diesen Spezialfall wollen wir den folgenden Satz beweisen[2]).

Satz I. *Es sei ϱ reell und negativ. Dann hat $P(z, \varrho)$ nur reelle negative Nullstellen und zwar eine und nur eine, $x_n(\varrho)$, in jedem Intervall $(-n, -n+1)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Weiter ist*

$$\frac{d}{d\varrho} x_n(\varrho) < 0, \qquad \lim_{\varrho \to 0} x_n(\varrho) = -n, \qquad \lim_{\varrho \to -\infty} x_n(\varrho) = -n+1.$$

Der erste Teil dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Partialbruchreihe (P). Wir setzen

$$P(z, \varrho) = \varrho^z p(z, \varrho), \tag{1}$$

also

$$p(z, \varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\varrho)^m}{m!\,(z+m)}. \tag{2}$$

[2]) Herr Kurt Mahler in Göttingen hat uns mitgeteilt, daß er ebenfalls diesen Satz gefunden habe, und zwar auf einem ganz anderen Wege.

Dann wird

$$\Im[p(z,\varrho)] = -y\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\varrho)^m}{m!\,|z+m|^2} \qquad (z = x+iy),$$

wenn ϱ reell ist. Nehmen wir nun an, daß ϱ reell negativ ist, so folgt aus (3), daß $\Im[p(z,\varrho)] \neq 0$, wenn $y \neq 0$. Also alle Nullstellen von $p(z,\varrho)$ sind reell und zwar natürlich negativ, wenn ϱ reell und negativ ist.

Es ist

$$p(-n+\varepsilon_n, \varrho) > 0, \qquad p(-n+1-\varepsilon_n, \varrho) < 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$p(\varepsilon, \varrho) > 0, \qquad p\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varrho\right) > 0,$$

für negative ϱ und genügend kleine ε. Weiter haben wir

$$\frac{\partial}{\partial z}p(z,\varrho) = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\varrho)^m}{m!\,(z+m)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}p(z,\varrho) = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(-\varrho)^{m-1}}{m!\,(z+m)} = -p(z+1,\varrho).$$

Es sei $z = x$ reell. Dann ist wegen (6) $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, also verschwindet $p(z,\varrho)$ ein und nur einmal in jedem Intervall $(-n, -n+1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ und hat keine anderen Nullstellen. Nun wollen wir auch (7) ausnutzen. Es ist

$$P(z+1,\varrho) - zP(z,\varrho) = -e^{-\varrho}\varrho^z,$$

also

$$\varrho\,p(z+1,\varrho) - z\,p(z,\varrho) = -e^{-\varrho}.$$

Wir finden demnach

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}p(x,\varrho) = -\frac{1}{\varrho}\left[x\,p(x,\varrho) - e^{-\varrho}\right].$$

Nehmen wir an, es sei $p(x,\varrho) = 0$. Für solche x und ϱ ist

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}p(x,\varrho) = \frac{e^{-\varrho}}{\varrho} < 0$$

und

$$\frac{dx}{d\varrho} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial \varrho}} < 0.$$

Also, wenn ϱ wächst, bewegen sich alle Nullstellen von $P(z,\varrho)$ nach links.

2. Lassen wir nun ϱ gegen 0 konvergieren. Dann ist wegen (2)

$$\lim_{\varrho\to 0} p(z,\varrho) = \frac{1}{z},$$

gleichmäßig in jedem endlichen Gebiet, das keine Pole von $p(z, \varrho)$ enthält. Es sei $x_n(\varrho)$ die Nullstelle von $p(z, \varrho)$ im Intervall $(-n, -n+1)$. Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ können wir ein ϱ_ε so bestimmen, daß $p(x, \varrho) > \frac{1}{2n}$ auf dem Intervall $(-n+\varepsilon, -n+1-\varepsilon)$ ist, wenn $0 > \varrho > \varrho_\varepsilon$. Es folgt, daß $x_n(\varrho)$ außerhalb dieses Intervalls liegen muß, wenn $0 > \varrho > \varrho_\varepsilon$. Aus (11) schließen wir dann $-n < x_n(\varrho) < -n+\varepsilon$ für solche Werte von ϱ. Es ist also

$$\lim_{\varrho \to 0} x_n(\varrho) = -n. \tag{13}$$

Der zweite Grenzwert

$$\lim_{\varrho \to -\infty} x_n(\varrho) = -n+1 \tag{14}$$

läßt sich ebenso leicht beweisen. Wir haben

$$p(x, \varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\varrho)^m}{m!\,(x+m)},$$

was wir als eine Potenzreihe in ϱ betrachten wollen. Wenn ϱ negativ ist und $-n < x < -n+1$, dann sind die ersten n Glieder dieser Reihe negativ, alle andern Glieder positiv. Es ist also

$$\lim_{\varrho \to -\infty} p(x, \varrho) = +\infty \tag{15}$$

für ein festes, nicht negativ ganzzahliges x, und zwar gleichmäßig für alle x eines Intervalls $-n+\varepsilon < x < -n+1-\varepsilon$, wo ε fest positiv, aber beliebig klein ist. Wir können folglich ϱ so klein wählen, daß $p(x, \varrho)$ in dem betreffenden Intervall positiv ist. Für solche Werte von ϱ muß $x_n(\varrho)$ außerhalb des Intervalles liegen, woraus die Richtigkeit von (14) erhellt.

§ 3.

Der Lemniskatensatz.

1. In den §§ 3 und 4 soll ϱ beliebige komplexe Werte annehmen können, wenn nicht ausdrücklich eine besondere Beschränkung gemacht wird. Um die Schreibweise zu vereinfachen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Unter einer *Lemniskate n-ter Ordnung* oder kürzer unter einer Lemniskate verstehen wir eine Kurve mit der Gleichung

$$|z+1|\,|z+2|\dots|z+n| = c \qquad (c > 0); \tag{16}$$

wir wollen sie mit $l_n(c)$ bezeichnen. $L_n(c)$ sei das Gebiet

$$|z+1|\,|z+2|\dots|z+n| < c. \tag{17}$$

Ferner sei eine Folge von positiven Zahlen c_n gegeben. Mit diesen Zahlen bilden wir die Gebiete $L_n(c_n)$. Unter $L(c_n)$ verstehen wir die Vereinigungsmenge aller $L_n(c_n)$, d. h. $L(c_n)$ ist die Menge aller Punkte, die wenigstens zu einem Gebiete $L_n(c_n)$ gehören. Die Komplementärmenge von $L(c_n)$ soll mit $T(c_n)$ bezeichnet werden. Es gilt dann der folgende Lemniskatensatz.

Satz II. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{a_n}$ *eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern, deren Summe* $\leqq 1$ *sei; weiter sei* $\lim \sqrt[n]{a_n}$ *endlich. Mit der Zahlenfolge* $a_n |\varrho|^n$ *bilden wir in der oben erklärten Weise die Punktmengen* $L(a_n |\varrho|^n)$ *und* $T(a_n |\varrho|^n)$. *Es ist* $P(z, \varrho)$ *in* $T(a_n |\varrho|^n)$ *von Null verschieden, d. h. die Nullstellen von* $P(z, \varrho)$ *liegen in* $L(a_n |\varrho|^n)$.

$L(a_n |\varrho|^n)$ *zerfällt in unendlich viele Komponenten* $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(m)}, \ldots$, *wobei die Aufzählung von rechts nach links geht. Es gibt zwei ganze Zahlen* $k(\varrho)$ *und* $N(\varrho)$, *so daß das Gebiet* $L^{(m)}$ *mit* $m = n - k(\varrho)$ *im Kreise* $|z + n| < R_n < \frac{1}{2}$ *liegt, wenn* $n \geqq N(\varrho)$ *ist. Es ist* $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$. *Jedes Gebiet* $L^{(m)}$ *mit* $m \geqq N(\varrho) - k(\varrho)$ *enthält eine und nur eine Nullstelle der Funktion* $P(z, \varrho)$. *Die übrigen Gebiete enthalten im ganzen* $N(\varrho) - k(\varrho) - 1$ *Nullstellen, und zwar jedes einzelne Gebiet ebenso viele Nullstellen, wie es dort Pole von* $z P(z, \varrho)$ *gibt.*

Bemerkung 1. Die Zahlenfolge a_n kann natürlich in unendlich vielfacher Weise gewählt werden. Für unsere Zwecke brauchbare Folgen sind zum Beispiel $a_n = 2^n$ oder $a_n = n(n+1)$. Diese ist asymptotisch günstiger, mit jener ist jedoch einfacher zu rechnen.

Bemerkung 2. Wenn man a_n spezialisiert, bekommt man numerische Grenzen für R_n und $N(\varrho)$. Man findet für $a_n = n(n+1)$, daß

$$R_n < \frac{1}{2} n^3 \left(\frac{2e|\varrho|}{n}\right)^n \tag{18}$$

und daß die Zahl $N(\varrho)$ gleich der kleinsten ganzen Zahl größer oder gleich

$$\operatorname{Max}\left(12, (4e + \sqrt{6})|\varrho| - \frac{1}{2}\right) \tag{19}$$

gewählt werden kann.

2. Beweis. Wir benutzen die Fakultätenreihe

$$P(z, \varrho) = e^{-\varrho} \varrho^z \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{\varrho^n}{z(z+1)\ldots(z+n)}, \tag{20}$$

wonach

$$e^{\varrho} \varrho^{-z} z P(z, \varrho) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\varrho^n}{(z+1)\ldots(z+n)}. \tag{21}$$

Es sei nun z ein beliebiger Punkt in $T(a_n|\varrho|^n)$. Dann ist

$$\left|\frac{\varrho^n}{(z+1)\dots(z+n)}\right| \leqq \frac{1}{a_n},$$

und zwar muß das Ungleichheitszeichen für unendlich viele n gelten, da $\lim \sqrt[n]{a_n}$ endlich angenommen worden ist. Folglich wird

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{(z+1)\dots(z+n)}\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leqq 1,$$

und deswegen kann $P(z, \varrho)$ nicht in $T(a_n|\varrho|^n)$ verschwinden. Es liegen also alle Nullstellen von $P(z, \varrho)$ in $L(a_n|\varrho|^n)$.

Wir werden nun die Gestalt dieser Punktmenge untersuchen. Es ist erstens klar, daß jeder Punkt $z = -m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ zur Menge $L(a_n|\varrho|^n)$ gehört. Für ein festes gegebenes ϱ können wir sogar eine Folge a_n so wählen, daß jeder Punkt der negativen reellen Achse zur $L(a_n|\varrho|^n)$ gehört, wenn wir auf die Endlichkeit von $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$ verzichten. Für $|\varrho| \geqq 1$ können wir etwa $a_n = (n+1)!$ nehmen. Uns interessiert aber die entgegengesetzte Frage: Können wir die Folge a_n so wählen, daß es Punkte auf der negativen reellen Achse mit beliebig großen Abszissen gibt, die zur Komplementärmenge $T(a_n|\varrho|^n)$ gehören? Wir werden bald sehen, daß eine solche Wahl in der Tat möglich ist; vorläufig werden wir aber nur einige Folgerungen aus der Existenz solcher Punkte ziehen.

Es sei also $z = x_0$ ein Punkt der negativen reellen Achse, der zu $T(a_n|\varrho|^n)$ gehört. Dann liegt die ganze Gerade $\Re(z) = x_0$ in $T(a_n|\varrho|^n)$. In der Tat, wir haben ja

$$|x_0+1|\,|x_0+2|\dots|x_0+n| \geqq a_n|\varrho|^n$$

für jedes n, da x_0 in $T(a_n|\varrho|^n)$ liegt; folglich wird um so mehr

$$|x_0+iy+1|\,|x_0+iy+2|\dots|x_0+iy+n| > a_n|\varrho|^n$$

sein, woraus die Behauptung folgt. In diesem Falle zerfällt also die Punktmenge $L(a_n|\varrho|^n)$ in wenigstens zwei Teilmengen, die keine gemeinsamen Punkte haben.

Es sei $L^{(\nu)}$ eine *Komponente* von $L(a_n|\varrho|^n)$, d. h. eine größte (in keiner andern enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von $L(a_n|\varrho|^n)$. Wir nehmen an, daß $L^{(\nu)}$ die Punkte $z = -j, -j-1, \dots, -j-m$ $(j \geqq 1, m \geqq 0)$ enthält und keine weiteren negativen ganzen Zahlen. Man ersieht ja unmittelbar, daß $L^{(\nu)}$ mit den Punkten $-j$ und $-j-m$ auch alle zwischenliegenden Punkte der reellen Achse enthalten muß. Wir lassen nun z den Rand $J^{(\nu)}$ von $L^{(\nu)}$ durchlaufen. Dabei beschreibt $w = e^{\varrho}\varrho^{-z}zP(z, \varrho)$ eine geschlossene Kurve in der w-Ebene, die auf Grund des obigen Beweises und (21) ganz innerhalb des Kreises $|w-1| = 1$

verlaufen muß. Folglich ändert sich $\arg w$ nicht, wenn z auf dem Rande von $L^{(\nu)}$ einen vollen Umlauf macht. Wir folgern hieraus, daß $L^{(\nu)}$ ebenso viele Nullstellen wie Pole von $z\,P(z, \varrho)$ enthält, also genau $m+1$ Nullstellen.

3. Wir betrachten nun die Kurve $l_n = l_n(a_n |\varrho|^n)$, d. h.

$$|z+1|\,|z+2|\ldots|z+n| = a_n |\varrho|^n.$$

Wir setzen $|z+\mu| = r_{n,\mu}$ und nehmen an, daß $r_{n,\nu}$ für einen gegebenen Wert von z auf l_n die kleinste oder eine der zwei kleinsten von den Größen $r_{n,1}, r_{n,2}, \ldots, r_{n,n}$ sei. Dann ist für $n \geqq 3$

$$r_{n,\nu\pm\mu} \geqq \mu - \frac{1}{2} \qquad (\nu \pm \mu = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n).$$

Folglich wird

$$r_{n,\nu} = \frac{a_n |\varrho|^n}{r_{n,1}\, r_{n,2} \cdots r_{n,\nu-1}\, r_{n,\nu+1} \cdots r_{n,n}} < \frac{a_n |\varrho|^n}{\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\left(n-\nu-\frac{1}{2}\right)}.$$

Der letzte Ausdruck hat seinen Maximalbetrag, wenn $n-\nu$ und $\nu-1$ möglichst wenig voneinander verschieden sind. Wenn n ungerade ist, erhält man daher

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{Max}\min |z+\mu| < \frac{\pi a_n |\varrho|^n}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Für gerade n erhalten wir

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{Max}\min |z+\mu| < \frac{\pi a_n |\varrho|^n}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (22) und (23) sind beliebig klein, wenn n genügend groß ist. Wir können nun ein $n_0 = n_0(\varrho)$ so bestimmen, daß die beiden Bedingungen

$$\text{(24)} \qquad \frac{\pi a_n |\varrho|^n}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\pi a_n |\varrho|^n}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} < \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \geqq n_0(\varrho)$$

erfüllt sind.

Es sei nun $n \geqq n_0(\varrho)$. Dann besagen die drei letzten Ungleichungen, daß die Lemniskate $l_n(a_n |\varrho|^n)$ n-teilig ist, und zwar enthält jeder der Kreise $|z+m| = \frac{1}{2}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots, n)$ in seinem Inneren ein geschlossenes Oval dieser Kurve. Bei wachsendem n ziehen sich diese Ovale unbeschränkt auf den bezüglichen Brennpunkt, d. h. den Mittelpunkt des umschließenden Kreises, zusammen.

Wir betrachten nun die Kurven $l_\nu = l_\nu(a_\nu |\varrho|^\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, n_0-1)$. Es sei $a = \operatorname{Max} \sqrt[\nu]{a_\nu}$ für diese Werte von ν. Ferner sei K_{n_0} die Vereinigungsmenge der Kreisgebiete $|z+1| \leqq a|\varrho|$, $|z+2| \leqq a|\varrho|, \ldots, |z+n_0-1| < a|\varrho|$. Die Kurven l_ν mit $\nu = 1, 2, \ldots, n_0-1$ gehören alle zu K_{n_0}. In der Tat,

es sei $z = z_0$ ein Punkt auf l_ν und $z = -\mu$ der Brennpunkt von l_ν, der z_0 am nächsten liegt. Wir haben auf l_ν

$$|z_0+1|\,|z_0+2|\dots|z_0+\nu| = a_\nu |\varrho|^\nu,$$

also für $\nu > 2$

$$|z_0+\mu|^\nu < a_\nu |\varrho|^\nu$$

oder

$$|z_0+\mu| < \sqrt[\nu]{a_\nu}\,|\varrho| \leqq a\,|\varrho|,$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir setzen nun $N = N(\varrho)$ gleich der kleinsten ganzen Zahl, die der Ungleichung

$$N(\varrho) \geqq n_0(\varrho) + a\,|\varrho| - \tfrac{1}{2} \tag{25}$$

genügt, und betrachten die Halbebene $\Re(z) \leqq -N(\varrho) + \frac{1}{2}$. Wir behaupten, daß diese Halbebene H keine der Kurven l_ν mit $\nu \leqq N-1$ enthält. Für $\nu \leqq n_0(\varrho) - 1$ ist diese Tatsache ohne weiteres klar, denn die oben eingeführte Punktmenge K_{n_0} liegt außerhalb H. Aber wenn $\nu \geqq n_0$ ist, liegen die Kurven l_ν in den Kreisgebieten $|z+\lambda| < \frac{1}{2}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \dots, \nu)$, die für $n_0 \leqq \nu \leqq N-1$ außerhalb H liegen.

Hieraus folgt, daß diejenigen Kurvenbogen unserer Lemniskatenfamilie, die in H liegen, Ovale von Kurven $l_\nu(a_\nu |\varrho|^\nu)$ mit $\nu \geqq N$ sind, und diese Ovale liegen in den Kreisen $|z+N| < \frac{1}{2}$, $|z+N+1| < \frac{1}{2}$, usw. Damit haben wir bewiesen, daß $L(a_n |\varrho|^n)$ wirklich in unendlich viele Komponenten zerfällt. Wir bezeichnen diese Komponenten mit $L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(m)}, \dots$, wobei die Aufzählung von rechts nach links fortschreitet. Es ist klar, daß jede Komponente $L^{(m)}$ mindestens eine negative ganze Zahl $z = -j$ in ihrem Inneren enthält, da alle Summanden $L_n(a_n |\varrho|^n)$ von $L(a_n |\varrho|^n)$ diese Eigenschaft haben. Jede Komponente $L^{(m)}$ enthält also auf Grund des obigen Beweises mindestens eine Nullstelle von $P(z, \varrho)$.

Durch (25) haben wir eine ganze Zahl $N(\varrho)$ bestimmt, die den Bedingungen von Satz II genügt; diese Zahl ist natürlich im allgemeinen nicht die kleinste Zahl mit diesen Eigenschaften. Die im Satz II erwähnte Zahl $k(\varrho)$ ist offenbar gleich $N(\varrho) - p - 1$, wo p die Anzahl der Gebiete $L^{(\nu)}$ außerhalb der Halbebene H ist.

4. Wir wollen nun numerische Abschätzungen für die Zahlen $n_0(\varrho)$ und $N(\varrho)$ und ebenso für den Durchmesser von $L^{(m)}$ angeben, wobei wir $a_n = n(n+1)$ setzen. Dazu müssen wir noch einmal die Größen

$$f_1(n) = \pi \frac{n(n+1)\,|\varrho|^n}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{und} \quad f_2(n) = \pi \frac{n(n+1)\,|\varrho|^n}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

betrachten, die in den Formeln (22) und (23) auftreten. Nach der Stirlingschen Formel ist

$$f_\nu(n) = \frac{1}{4} n^3 \left[\frac{2e|\varrho|}{n}\right]^n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (\nu = 1, 2),$$

und sogar

$$f_\nu(n) < \frac{1}{2} n^3 \left[\frac{2e|\varrho|}{n}\right]^n = f(n) \tag{26}$$

für $n \geqq 1$.

Es ist also

$$\operatorname{Max} \min |z + \mu| < f(n), \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{27}$$

wenn z auf $l_n(n(n+1)|\varrho|^n)$ liegt. Die Funktion $f(n)$ ist sicher monoton abnehmend, wenn $n \geqq \operatorname{Max}(3, 2e|\varrho|)$, und sie ist kleiner als $\frac{1}{2}$, wenn $n \geqq \operatorname{Max}(10, 4e|\varrho|)$, wie man leicht nachrechnet. Wir können also $n_0(\varrho)$ gleich der kleinsten ganzen Zahl nehmen, die die Ungleichung

$$n_0(\varrho) \geqq \operatorname{Max}(10, 4e|\varrho|) \tag{28}$$

erfüllt. Da $\operatorname{Max} \sqrt[n]{n(n+1)} = \sqrt{6}$ ist, so schließen wir, daß

$$N(\varrho) \geqq \operatorname{Max}\left(12, (4e + \sqrt{6})|\varrho| - \frac{1}{2}\right), \tag{29}$$

wobei wir die kleinste ganze Zahl nehmen können, die (29) erfüllt. Diese Zahlen sind natürlich im allgemeinen viel zu groß. Es sei z. B. $\varrho = 1$. Die Funktion $P(z, \varrho)$ hat nur vier komplexe (nicht reelle) Nullstellen; schon die fünfte Nullstelle hat einen Abstand von dem entsprechenden Pol $z = -5$, der kleiner als $\frac{1}{6}$ ist. Die kleinste ganze Zahl $N(1)$ mit den im Satz II angegebenen Eigenschaften ist also 5, während wir aus (28) nur $N(1) = 13$ erhalten [3]).

Es sei nun $n \geqq N(\varrho)$ und $m = n - k(\varrho)$, dann liegt das Gebiet $L^{(m)}$ ganz in der Kreisscheibe $|z + n| < f(n)$. Es sei z_n die (einzige) Nullstelle von $P(z, \varrho)$ in $L^{(m)}$. Dann ist

$$z_n = -n + (-1)^n \zeta_n \quad \text{mit} \quad |\zeta_n| < f(n). \tag{30}$$

Diese Abschätzung ist in erster Annäherung von der richtigen Größenordnung. Es ist nämlich

$$z_n = -n + (-1)^n \frac{e^\varrho \varrho^n}{(n-1)!}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{31}$$

Das kann man folgendermaßen zeigen. Die Gleichung $P(z, \varrho) = 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\Gamma(z) = Q(z, \varrho) = \int_\varrho^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{32}$$

[3]) Für die Nullstellen von $P(z, 1)$ vgl. A. Walther, Über die reellen Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z)$, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 238—245, wo sich weitere Literaturangaben finden.

Mit Benutzung der Differenzengleichung für $Q(z, \varrho)$ können wir (32) in

$$z e^{\varrho} \varrho^{-z} \Gamma(z) = -1 - \frac{\varrho}{z+1} + \frac{e^{\varrho} \varrho^{-z}}{z+1} Q(z+2, \varrho) \tag{33}$$

umformen. Das letzte Glied rechts ist $O\left(\frac{1}{z}\right)$; denn nach der obigen Integraldarstellung von $Q(z, \varrho)$ ist

$$e^{\varrho} \varrho^{-z} Q(z+2, \varrho) = \varrho^{-z} \int_0^{\infty} e^{-t} (t+\varrho)^{z+1} dt,$$

wobei der Integrationsweg bei negativem ϱ nicht durch den Punkt $-\varrho$ gehen darf. Dieser Ausdruck bleibt aber unterhalb einer festen Schranke, wenn $-\pi < \arg \varrho \leqq \pi$, $\varrho \neq 0$, $\Re z < -2$ und $\Im z$ beschränkt ist; wir können uns natürlich auf solche Werte von z und ϱ beschränken. Wir setzen nun $z = -n + (-1)^n \zeta_n$. Nach (30) ist $|\zeta_n| = o(n^{-k})$ für jedes feste, beliebig große k. Mit Hilfe des Ergänzungssatzes für $\Gamma(z)$ formen wir (33) um und erhalten nach einigen Vereinfachungen

$$n^{\zeta_n} = 1 + O(\zeta_n \log n),$$

$$\Gamma(-n + (-1)^n \zeta_n) = \frac{1}{\zeta_n \Gamma(n+1)} [1 + O(\zeta_n \log n)],$$

also

$$\frac{1}{\zeta_n} \frac{e^{\varrho} \varrho^n}{\Gamma(n)} \left[1 - (-1)^n \frac{\zeta_n}{n}\right] [1 + O(\zeta_n \log n)] = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

woraus (31) unmittelbar folgt[4]).

5. Aus dem Beweis für Satz II folgt auch der folgende

Satz III. *Die Nullstellen von $P(z, \varrho)$ liegen in der Vereinigungsmenge der Kreisgebiete $|z+n| < 2|\varrho|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

In der Tat, wir haben ja schon bewiesen, daß alle Kurven $l_m(a_m |\varrho|^m)$ in den Kreisgebieten $|z+n| \leqq a|\varrho|$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit $a = \operatorname{Max} \sqrt[n]{a_n}$ liegen. Setzen wir hier $a_n = 2^n$, so erhalten wir Satz III. Dieser Satz ist für kleine Werte von $|\varrho|$ ziemlich bequem. Er zeigt, daß wenn $|\varrho| \leqq \frac{1}{4}$ ist, enthält jedes Gebiet $L^{(m)}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ nur eine Nullstelle, die von dem Pol $z = -m$ einen Abstand kleiner als $\frac{1}{2}$ hat. Mit anderen Worten, $N(\varrho)$ ist gleich 1, wenn $|\varrho| \leqq \frac{1}{4}$ ist. Nehmen wir ϱ reell und $|\varrho| \leqq \frac{1}{4}$, so folgt unmittelbar, daß alle Nullstellen von $P(z, \varrho)$ reell sind[5]).

---

[4]) Für die in diesem Beweis benutzten Eigenschaften von $Q(z, \varrho)$ vergleiche N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin 1924, S. 388—406.

[5]) Dieses Ergebnis ist für negative ϱ in Satz I enthalten; für positive ϱ hat Herr Mahler gefunden, daß sämtliche Nullstellen reell sind für $\varrho \leqq \varrho_0 = 0{,}3080896\ldots$ und daß es mindestens zwei imaginäre Nullstellen gibt für $\varrho > \varrho_0$. Hieraus geht übrigens $N(\varrho) > 1$ für $\varrho > \varrho_0$ hervor.

6. Die hier für die Untersuchung der Verteilung der Nullstellen von $P(z, \varrho)$ entwickelte Methode läßt sich natürlich auf allgemeinere Funktionenklassen übertragen, soweit die betreffenden Funktionen sich in beständig konvergierende Fakultätenreihen entwickeln lassen. Es sei erstens

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{34}$$

mit $c_0 = 1$ und $|c_n| \leqq c^n$ für einen festen Wert von c. Für diese Funktion gilt ein ähnlicher Lemniskatensatz wie für $P(z, \varrho)$; die Menge $L(a_n |c_n|)$ ist eine Teilmenge von $L(a_n c^n)$.

Es sei zweitens

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, b_n}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{35}$$

mit $b_0 = 1$ und $|b_n| \leqq b^n$ für hinreichend große n, wo $b < \frac{1}{2}$ ist. Hier gilt auch ein Lemniskatensatz, und die Punktmenge $L(n(n+1)n!\,|b_n|)$ zerfällt in unendlich viele Komponenten; diejenigen Komponenten, die von dem Ursprung genügend weit entfernt sind, haben einen beliebig kleinen Durchmesser. Ein ganz ähnlicher Satz gilt für die Verteilung der C-Stellen für beliebige C.

Für diese Funktionenklasse können wir aus der Theorie der Kugelfunktionen ein interessantes Beispiel bekommen. Die Kugelfunktion zweiter Art $Q_a(x)$ läßt sich in eine Fakultätenreihe in dem Parameter entwickeln, nämlich

$$Q_a(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)} \frac{\xi^{a+1}}{\sqrt{1-\xi^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a+\frac{3}{2}, \frac{\xi^2}{\xi^2-1}\right)$$

mit $\xi = x - \sqrt{x^2-1}$. Hier ist $b_n = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(n+1)} \left(\frac{\xi^2}{\xi^2-1}\right)^n$, wenn wir von unwesentlichen Faktoren absehen. Die hypergeometrische Reihe konvergiert für alle Werte von a mit Ausnahme der Zahlen $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$, wenn $\left|\frac{\xi^2}{\xi^2-1}\right| < 1$ ist. Beschränken wir x auf das Gebiet $\left|\frac{\xi^2}{\xi^2-1}\right| \leqq \alpha < \frac{1}{2}$, so sind die Nullstellen in der a-Ebene auf gewisse Umgebungen der Zahlen $a = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$ beschränkt, deren Durchmesser dem Grenzwert Null zustrebt [6]).

[6]) Für die Nullstellen von $Q_a(x)$ siehe E. Hille, Some problems concerning spherical harmonics, Arkiv för Mat. **13** (1918), Nr. 17, S. 47–51, und On the zeros of Legendre functions, ebenda **17** (1922), Nr. 22, S. 14–16. Die oben benutzte Fakultätenreihe wird in der ersten dieser Arbeiten auf S. 14–16 diskutiert.

Kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück! Wir haben eben gesehen, daß die Ordinaten der Nullstellen von $F(z)$ beschränkt sind, und zwar können wir die Nullstellen z_n so numerieren, daß $\lim_{n\to\infty}(z_n + n) = 0$ ist. Dafür müssen wir aber $b < \frac{1}{2}$ voraussetzen; für $\frac{1}{2} \leqq b < 1$ gilt ein solcher Satz im allgemeinen nicht. Wir können auch in diesem Falle einen Lemniskatensatz beweisen, aber die Punktmenge $L(a_n n! \,|\, b_n^{\,n})$ braucht nicht zu zerfallen und sie ist im allgemeinen in keinem Streifen endlicher Breite eingeschlossen. Das können wir aus dem einfachsten Falle $b_n = \frac{1}{2^n}$ ersehen. Die entsprechende Funktion

$$F(z) = 2\beta(z) = 2\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{t+1}\,dt = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{z+m} = \mathfrak{S}\frac{\nabla z}{z}$$

ist aus der Theorie der Gammafunktion bekannt. Ihre Nullstellen wurden neulich von T. H. Gronwall untersucht[7]). Alle Nullstellen sind komplex, jeder Streifen $-2n-\frac{1}{2} < \Re(z) < -2n+\frac{3}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ enthält genau zwei Nullstellen, deren Ordinaten gleich

$$\pm\frac{1}{\pi}\log(8n+2)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sind. Unter solchen Umständen darf man nicht erwarten, daß die Punktmenge $L\left(a_n \frac{n!}{2^n}\right)$ zerfallen soll, und es ist in der Tat leicht zu beweisen, daß sie wirklich nicht zerfällt. Eine kleine Rechnung zeigt nämlich, daß $z = -m - \frac{1}{2}$ und damit auch das ganze Intervall $(-m-1, -m)$ zu $l_{2m}\left(\frac{(2m)!}{2^{2m}}\right)$ gehört, wo $m = 1, 2, 3, \ldots$ angenommen werden kann. Hieraus folgt unmittelbar, daß $L\left(a_n \frac{n!}{2^n}\right)$ nicht zerfällt, da $a_n > 1$ ist für jedes n. Man kann weiter zeigen, daß auf dem Rande von $L\left(n(n+1)\frac{n!}{2^n}\right)$ die Ordinate gleich $O(\log|x|)$ ist.

Wie bemerkt ist, kann man auch für $\frac{1}{2} \leqq b < 1$ einen Lemniskatensatz beweisen; der folgende Satz ist jedoch einfacher und leichter zu übersehen, nämlich:

Die Funktion $F(z)$, die durch die Reihe (35) definiert ist, hat keine Nullstellen im Sektor $|\arg(z-2)| \leqq \pi - \arcsin b$, wenn $b_0 = 1$ und $|b_n| \leqq b^n$ mit $0 < b < 1$ für alle n ist.

Der Arkussinus soll hier seinen Hauptwert haben. Für den Beweis bemerken wir nur, daß in diesem Sektor $|z+m| \geqq b(m+2)$ ist. Daraus

[7]) T. H. Gronwall, On the zeros of the function $\beta(z)$ associated with the Gamma function, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), p. 391–399. Die Ergebnisse der Arbeit wurden der Amer. Math. Soc. im September 1916 vorgelegt.

folgt, daß in dem betreffenden Sektor

$$|z F(z)| > 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$$

ist, woraus man den Satz erhält.

4. Halbebenensätze.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen sollen nun in verschiedener Hinsicht ergänzt werden. Man kann beweisen durch allerlei Methoden, daß die Funktion $P(z, \varrho)$ in einer Halbebene $\Re(z) \geqq \sigma(\varrho)$ von Null verschieden ist, wenn ϱ in einem gewissen Gebiete der ϱ-Ebene liegt. Satz III besagt, daß wir $\sigma(\varrho) = 2|\varrho| - 1$ annehmen können. Durch spezielle Methoden kann man jedoch günstigere Werte finden. Wir setzen $z = x + iy$ und $\varrho = \alpha + i\beta$ und werden die folgenden Sätze beweisen:

Satz IV. $P(z, \varrho) \neq 0$, *wenn*

$$x \geqq \varrho \frac{|y|}{\pi}\left[1 - e^{-\frac{\pi}{|y|}}\right] - 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta = 0. \tag{36}$$

Satz V. $P(z, \varrho) \neq 0$, *wenn*

$$x \geqq |\varrho| + \alpha - 1, \quad \alpha > 0; \tag{37}$$

$$x \geqq \operatorname{Min}\left\{|\varrho| - 1,\ (|\varrho| - 1)\left(1 + \frac{\alpha}{|\varrho|}\right),\ -\frac{1}{p} + \frac{|\varrho|^p}{(-\alpha)^{p-1}} \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\right\}, \tag{38}$$

$$\alpha \leqq 0,$$

wo $p > 1$ *beliebig ist.*

Satz VI. $P(z, \varrho) \neq 0$, *wenn*

$$x \geqq -\frac{1}{2}, \quad |\varrho| \leqq \log 2. \tag{39}$$

Satz VII. $P(z, \varrho) \neq 0$, *wenn*

$$x \geqq 0, \quad |\varrho| \leqq \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1}. \tag{40}$$

Beweis von Satz IV. Dazu benutzen wir die Integraldarstellung

$$P(z, \varrho) = \int_0^{\varrho} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{41}$$

die für $x > 0$ gültig ist. Wir beschränken uns deswegen vorläufig auf die rechte z-Halbebene. Weiter können wir $y > 0$ annehmen. In (41) setzen wir dann

$$t = \varrho e^{-\frac{u}{y}}$$

und erhalten dadurch

$$\varrho^{-z} P(z, \varrho) = p(z, \varrho) = \frac{1}{y} \int_0^x \exp\left[-\varrho e^{-\frac{u}{y}} - \frac{z}{y} u \right] du \tag{42}$$

und

$$\Im[p(z, \varrho)] = -\frac{1}{y} \int_0^\infty \exp\left[-\varrho e^{-\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} u \right] \sin u \, du, \tag{43}$$

da ϱ reell positiv ist. Die rechte Seite von (43) bleibt sicher negativ, wenn wir x so wählen können, daß für jedes $u \geqq 0$

$$\varrho e^{-\frac{u+\pi}{y}} + \frac{x}{y}(u+\pi) \geqq \varrho e^{-\frac{u}{y}} + \frac{x}{y} u$$

ist, wo das Ungleichheitszeichen auf einem Intervall gelten soll. Wenn diese Bedingung für $u = 0$ erfüllt ist, so gilt sie um so mehr für positive u. Folglich wird

$$p(z, \varrho) \neq 0 \quad \text{sein, wenn} \quad x \geqq \varrho \frac{|y|}{\pi} \left[1 - e^{-\frac{\pi}{|y|}} \right]. \tag{44}$$

Um die schärfere Bedingung (36) unseres Satzes zu erhalten, bemerken wir, daß nach (9)

$$\varrho \Im[p(z+1, \varrho)] = \Im[z p(z, \varrho)] \tag{45}$$

für reelle ϱ ist. Es sei nun $\Im[p(z, \varrho)]$ von festem Vorzeichen in einem gewissen Gebiete G der z-Ebene für ein festes reelles ϱ. Wir bewegen G parallel zu sich selbst um die Strecke 1 nach links; es sei G^* das dadurch erhaltene Gebiet. Dann besagt (45), daß $p(z, \varrho) \neq 0$ in $G + G^*$. Benutzen wir diese Bemerkung und (44), so folgt (36) unmittelbar.

Auf dem Rande des Gebietes (36) ist $0 \leqq x + 1 < \varrho$, und zwar ist $\lim_{y \to 0}(x+1) = 0$ und $\lim_{|y| \to \infty}(x+1) = \varrho$. Weiter ist $\operatorname{sgn} \frac{dx}{dy} = \operatorname{sgn} y$ und $\lim_{y \to 0} \frac{dx}{dy} = \pm \frac{\varrho}{\pi}$, d. h. die Randkurve bildet im Punkte $z = -1$ die Winkel $\pm \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\varrho}$ mit der reellen Achse. Es ist also speziell

$$P(z, \varrho) \neq 0, \quad \text{wenn} \quad x + 1 \geqq \varrho > 0. \tag{46}$$

3. Beweis der Sätze V und VII. Hier benutzen wir die Funktionalgleichung (8) in der Form

$$z e^{\varrho} \varrho^{-z} P(z, \varrho) = 1 + e^{\varrho} \varrho^{-z} P(z+1, \varrho) = 1 + \varrho \int_0^1 e^{-\varrho(t-1)} t^z \, dt,$$

die für $x > -1$ gültig ist. Also haben wir

$$|z e^{\varrho} \varrho^{-z} P(z, \varrho)| \geqq 1 - |\varrho| \int_0^1 e^{-\alpha(t-1)} t^x \, dt = 1 - |\varrho| e^{\alpha} \alpha^{-x-1} P(x+1, \alpha),$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn z reell und ϱ negativ reell ist. Dieser Fall ist schon früher behandelt worden, und wir wollen deshalb von dieser Möglichkeit absehen. Wir schließen dann, daß $P(z, \varrho)$ sicher von Null verschieden ist, wenn

$$|\varrho|\, e^{\alpha}\, \alpha^{-x-1}\, P(x+1, \alpha) \leqq 1, \quad x > -1. \tag{47}$$

Um den Satz VII zu beweisen, brauchen wir nur das Integral

$$I = \int_0^1 e^{-\alpha(t-1)}\, t^x\, dt$$

in folgender Weise abzuschätzen. Wir nehmen $x \geqq 0$; dann ist $t^x \leqq 1$ und

$$I \leqq \int_0^1 e^{-\alpha(t-1)}\, dt = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}.$$

Es ist also $P(z, \varrho) \neq 0$, wenn

$$x \geqq 0 \quad \text{und} \quad |\varrho| \leqq \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1},$$

womit Satz VII bewiesen ist. Die Begrenzungskurve in der ϱ-Ebene ist symmetrisch zu der α-Achse, deren negative Hälfte die einzige (reelle) Asymptote der Kurve ist. Sie schneidet die α-Achse in $\varrho = \log 2$, die β-Achse in $\varrho = \pm i$.

Um Satz V zu beweisen, schätzen wir I für $\alpha \leqq 0$ und für $\alpha > 0$ besonders ab. Nehmen wir erstens $\alpha \leqq 0$. Dann ist

$$I < \int_0^1 t^x\, dt = \frac{1}{x+1},$$

d. h. die Halbebene $x \geqq |\varrho| - 1$ enthält keine Nullstellen von $P(z, \varrho)$. Wir wollen nun die Hölder-Schwarzsche Ungleichung benutzen. Es ist für beliebige $p > 1$

$$I^p < \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{p\alpha}{p-1}(t-1)}\, dt \right\}^{p-1} \int_0^1 t^{px}\, dt$$

$$= \left\{ -\frac{p-1}{p\alpha} \left[1 - e^{\frac{p\alpha}{p-1}} \right] \right\}^{p-1} \frac{1}{px+1} \leqq \left(-\frac{p-1}{p\alpha} \right)^{p-1} \frac{1}{px+1}.$$

Folglich ist $P(z, \varrho) \neq 0$, wenn

$$x \geqq -\frac{1}{p} + \frac{|\varrho|^p}{(-\alpha)^{p-1}} \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}, \quad p > 1, \quad \alpha < 0. \tag{48}$$

Nun können wir aber $p > 1$ so bestimmen, daß das zweite Glied rechts in (48)

ein Minimum wird. Dazu müssen wir $p = \left[1 + \frac{\alpha}{|\varrho|}\right]^{-1}$ nehmen und finden dadurch, daß

$$x \geqq (|\varrho| - 1)\left(1 + \frac{\alpha}{|\varrho|}\right) \tag{49}$$

eine nullstellenfreie Halbebene ist. Damit haben wir die zweite Hälfte von Satz V bewiesen. Um den Fall $\alpha > 0$ zu erledigen, bemerken wir, daß

$$I = e^{\alpha}\alpha^{-x-1}P(x+1, \alpha)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} = \frac{1}{x+1-\alpha},$$

wenn $x + 1 > \alpha$. Hieraus folgt die erste Hälfte des betreffenden Satzes.

Beweis von Satz VI. Dazu benutzen wir die Partialbruchreihe

$$p(z, \varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\varrho)^m}{m!\,(z+m)}.$$

Wir haben

$$|zp(z, \varrho)| \geqq 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\varrho|^m}{m!}\left|\frac{z}{z+m}\right|.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist offenbar positiv, wenn

$$|\varrho| \leqq \log 2 \quad \text{und} \quad \left|\frac{z}{z+m}\right| \leqq 1 \quad \text{für} \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die letzten Ungleichungen sind gleichzeitig erfüllt, wenn $\Re(z) = x \geqq -$ ist, womit Satz VI bewiesen ist.

(Eingegangen am 28. Juli 1927.)

Eine geometrische Charakterisierung der Studyschen eigentlichen Kreisbogendreiecke (Dreiecke erster Klasse).

Von

Hans Falckenberg in Gießen.

§ 1.

Aufgabenstellung.

Die von H. A. Schwarz und F. Klein[1]) zu funktionentheoretischen Zwecken eingeführten Kreisbogendreiecke auf der Kugel zeichnen sich dadurch vor allen anderen solchen Dreiecken aus, daß man ihnen eine *einfach zusammenhängende Fläche* zuweisen kann. D. h. zu jedem dieser Dreiecke kann man eine Fläche nach Art einer Riemannschen finden, für die folgendes gilt:

I. Die Berandung des Kreisbogendreieckes bildet auf ihr, falls man die Ecken, deren zugehörige Winkel größer als 2π sind, als Windungspunkte auffaßt, einen einfachen geschlossenen Linienzug, der sich nicht selbst überkreuzt.

II. In die Berandung kann man eine einfach zusammenhängende Membran einspannen, die sich normalerweise durch sämtliche Blätter der Fläche hindurchzieht.

III. Bei geeigneter Definition des Flächeninhaltes einer Membran[2]) wird dieser, der nur von den Winkeln $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ abhängt[3]), durch

---

[1]) Vgl. etwa die autographierten Vorlesungen „Über die hypergeometrische Funktion", Neuer Abdruck 1906, S. 375 ff.

[2]) Es genügt zu definieren, daß der Flächeninhalt eines elementaren Kreisbogendreiecks durch die Inhaltsformel der sphärischen Trigonometrie gegeben ist. Der Flächeninhalt eines Zweiecks mit dem Öffnungswinkel α wird dann $\alpha\pi$, der einer Vollkreisfläche 2π und der einer Vollkugeloberfläche 4π.

[3]) Man weiß, daß ein einfach zusammenhängendes Kreisbogendreieck durch seine Winkel allein völlig bestimmt ist.

die Flächeninhaltsformel für elementare sphärische Dreiecke

$$J = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)\,\pi$$

ausgedrückt.

Im Anschluß an II nennen wir diese Dreiecke „*Membran*dreiecke".

Bei der Behandlungsweise der sphärischen Trigonometrie, wie sie E. Study [4]) eingeführt hat, werden die Kreisbogendreiecke ohne Rücksicht darauf, ob man ihnen eine Fläche zuweisen kann oder nicht, nur als eine Zusammenstellung von sechs Bestimmungsstücken (drei Winkeln und drei Seiten) betrachtet, die den Formeln der sphärischen Trigonometrie genügen sollen [5]). Study gelangt zu einer Einteilung sämtlicher Kreisbogendreiecke in zwei völlig getrennt verlaufende Kontinua (Klassen): *eigentliche* Dreiecke (1. Klasse), für die in den Delambreschen Gleichungen die „oberen", und *uneigentliche* (2. Klasse), für die dort die „unteren" Vorzeichen gelten.

Die Kleinschen Membrandreiecke gehören dem Kontinuum der eigentlichen Dreiecke an, doch sind keineswegs etwa alle eigentlichen Dreiecke zugleich Membrandreiecke. *Klein hat aber*, wie er das verschiedentlich ausgesprochen hat [6]), in dieser Beziehung *eine anschauliche Analogie zwischen den eigentlichen Dreiecken und den Membrandreiecken vermutet*, die man in Anlehnung an die oben über Membrandreiecke ausgesprochenen Sätze etwa folgendermaßen formulieren kann:

Zu jedem eigentlichen Dreieck läßt sich eine Fläche nach Art einer Riemannschen konstruieren, für die folgendes gilt:

I. *Die Berandung des eigentlichen Dreiecks bildet auf ihr, wenn man die Ecken, deren zugehörige Winkel größer als* 2π *sind, als Windungspunkte auffaßt, einen geschlossenen Linienzug.* (Vermutung I.)

II. *In die Berandung kann man eine einfach zusammenhängende Membran oder mehrere einfach zusammenhängende „Membranstücke" einspannen, die sich unter Umständen durch mehrere Blätter der Fläche hindurchziehen werden* [7]). (Vermutung II.)

---

[4]) „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen", Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. **20** (1892), S. 85.

[5]) Falls man, wie wir es tun wollen, die projektive (Cayleysche) Maßbestimmung mit der Kugel der Dreiecke als Fundamentalfläche zugrunde legt, so genügen die Bestimmungsstücke jedes Kreisbogendreiecks den Formeln der sphärischen Trigonometrie, und Studys Resultate gelten in gleicher Weise für Kreisbogendreiecke wie für sphärische.

[6]) Z. B. Vorlesungen über Elementarmathematik I, Leipzig 1924, S. 199—201.

[7]) Teile der Membranstücke, die in bestimmten einzelnen Blättern einer Dreiecksfläche liegen, werden wir später gelegentlich als „Membranteile" bezeichnen; sie brauchen nicht immer einfach zusammenhängende Fächen im Sinne der analisis situs zu bilden.

III. *Bei geeigneter Definition des Flächeninhaltes eines Membranstückes*[2]) *ergibt die algebraische Summierung der Flächeninhalte aller eingehängten Membranstücke* (*wobei man die Inhalte der bei Durchlaufung der Berandung zur Linken liegenden positiv, die der hierbei zur Rechten liegenden negativ einzusetzen hat*) *zu einem „Gesamtflächeninhalt" einen Ausdruck, der nur von den Dreieckswinkeln* $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ *abhängt und durch die oben angegebene Inhaltsformel für sphärische Dreiecke ausgedrückt wird.* (Vermutung III.)

Dreiecke, welche die in den drei Vermutungen ausgesprochenen Eigenschaften haben, wollen wir „Flächendreiecke"[8]) nennen. Die Membrandreiecke erweisen sich nunmehr als diejenigen Spezialfälle der Flächendreiecke, deren Berandung sich nicht überkreuzt und bei denen man eine einzige Membran in die Berandung einspannen kann.

Die Kleinschen Vermutungen enthalten eine neue rein geometrische Charakterisierung[9]) der eigentlichen Dreiecke, die dahin geht, daß die eigentlichen Dreiecke geometrisch durch Flächendreiecke dargestellt werden können.

Ihrem Beweis gelten die folgenden Ausführungen. Er wird so geführt, daß wir zu jedem eigentlichen, durch Winkel und Seiten gegebenen Dreieck die Figur eines Dreiecks mit diesen Winkeln und Seiten konstruieren, für die wir die Kleinschen Vermutungen verifizieren, und die also die Eigenschaften eines Flächendreiecks hat.

Wie Fr. Schilling[10]) beim Beweis der Kleinschen Ergänzungsrelationen für alle möglichen *Membran*dreiecke mit reellen Winkeln Figuren angegeben hat, so werden bei unserem Beweis Figuren für alle möglichen *eigentlichen* Dreiecke mit reellen Winkeln aufgezeigt, wobei dort die Membran, hier die Membran*stücke* im Vordergrund der Betrachtung stehen.

---

[8]) Das Wort Flächendreieck habe ich in einer früheren Arbeit in der gleichen Bedeutung wie das Wort Membrandreieck gebraucht. Hier ist die Bedeutung eine andere. Zwar sind alle Membrandreiecke Flächendreiecke, nicht aber alle Flächendreiecke Membrandreiecke.

[9]) Geometrisch definiert man im allgemeinen die eigentlichen Dreiecke als diejenigen, die aus einem *elementaren* sphärischen Dreieck durch stetige Verzerrung gewonnen werden können. Die analytische Definition mit Hilfe der Delambreschen Gleichungen ist im Text angedeutet.

[10]) Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion für komplexe Exponenten, Math. Annalen **44** (1894), S. 62.

§ 2.

Arithmetische Konstruktion der sämtlichen zu gegebener Winkelkombination gehörenden Kreisbogendreiecke.

Gegeben sei eine beliebige Kombination *reeller, positiver*[11]) Winkel $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$. Nach den Methoden von Fr. Schilling[12]) denken wir uns das zugehörige Membrandreieck konstruiert; seine Seiten seien $a_1\pi$, $a_2\pi$, $a_3\pi$. Aus diesem Dreieck gewinnen wir gemäß den Studyschen Resultaten[13]) sämtliche Kreisbogendreiecke mit den gegebenen Winkeln, indem wir die Seiten sämtlichen Substitutionen

$$(1) \qquad \begin{cases} \pm a_1 + 2k_1 \\ \pm a_2 + 2k_2 \\ \pm a_3 + 2k_3 \end{cases}$$

unterwerfen, bei denen entweder überall das obere oder überall das untere Vorzeichen gilt und die Zahlen k_i $(i = 1, 2, 3)$ positive oder negative ganze Zahlen — einschließlich der 0 — bedeuten. Insbesondere erhält man sämtliche zur Winkelkombination gehörenden *eigentlichen* Dreiecke, wenn man diesen ganzen Zahlen noch die Kongruenz

$$(1a) \qquad k_1 + k_2 + k_3 \equiv 0 \pmod 2,$$

sämtliche zur Winkelkombination gehörenden *uneigentlichen,* wenn man ihnen die Kongruenz

$$(1b) \qquad k_1 + k_2 + k_3 \equiv 1 \pmod 2$$

auferlegt.

Für ein Dreieck, das aus einem nach Bestimmungsstücken und Figur gegebenen, mit den Seiten $a_1\pi$, $a_2\pi$, $a_3\pi$ durch die Substitution

$$(2) \qquad \begin{cases} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{cases}$$

hervorgeht, können wir dadurch zu einer Figur gelangen, daß wir in der gegebenen Dreiecksfigur die positive Richtung aller drei Seiten gleichzeitig umkehren. Dabei bleiben die eventuell vorhandenen Eigenschaften eines Flächendreiecks erhalten. Will man nur auf diese Eigenschaften achten, so genügt es also zur Untersuchung aller zur gegebenen Winkelkombination

---

[11]) Die Seiten werden dann reell oder bis auf ganze Vielfache von π rein imaginär.

[12]) a. a. O. S. 208 ff.

[13]) a. a. O. S. 107.

gehörenden eigentlichen Dreiecke, die sechs Substitutionen

$$(3) \qquad \begin{matrix} (a) \\ \begin{cases} a_1 \\ a_2 + 2 \\ a_3 + 2 \end{cases} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (b) \\ \begin{cases} a_1 \\ a_2 - 2 \\ a_3 - 2 \end{cases} \end{matrix}$$

und je zwei weitere, die aus diesen durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehen, auf die Seiten des zugehörigen *Membran*dreiecks in beliebigen Kombinationen anzuwenden.

Um zu sämtlichen uneigentlichen Dreiecken zu gelangen, würde es genügen auf alle erhaltenen eigentlichen Dreiecke die Substitution

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1 + 2 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases}$$

anzuwenden.

Will man nur diejenigen Dreiecke erhalten, deren Seiten > 0 [14]) sind, so genügt es offenbar in den Substitutionen (3) und (4) anzunehmen, daß $0 \leqq a_k$ [14]) $(k = 1, 2, 3)$ ist und in den Substitutionen (3b) überdies die Ungleichungen $2 \leqq a_2$, $2 \leqq a_3$ [14]) bzw. die durch zyklische Vertauschung aus ihnen hervorgehenden gelten.

§ 3.

Die Substitution (3a).

Wir gehen von einem beliebigen Flächendreieck Δ mit den Ecken A_1, A_2, A_3, den Winkeln $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ und den Seiten $a_1\pi$, $a_2\pi$, $a_3\pi$ aus. Die nach Vermutung I zugehörende Fläche heiße F. A_1 sei ein n-facher Windungspunkt $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, der vom Blatt $\mathfrak{B}_1$ durch die Blätter $\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{n-1}$, $\mathfrak{B}_n$ bis ins Blatt $\mathfrak{B}_{n+1}$ der Fläche F führen möge.

Zunächst betrachten wir den allgemeinen Fall, in dem $n > 0$ ist.

Hier heften wir *erstens* dem Blatt $\mathfrak{B}_1$ und damit der Fläche F in dem zur Ecke A_1 gehörenden Punkt A_{11} des Blattes $\mathfrak{B}_1$ ein neues Blatt $\mathfrak{B}_0$ derart an, daß der zur Seite A_1A_2 gehörende Vollkreis k_0 dieses Blattes von seinem in der Ecke A_1 liegenden Punkt A_{10} zum Punkt A_{11} führt und die Punkte A_{11} und A_{10} außerdem durch eine neue Windung in A_1 miteinander zusammenhängen.

---

[14]) Bei dieser im Fall komplexer oder rein imaginärer Seiten nicht ganz korrekten, aber leicht verständlichen Schreibweise ist zur Vermeidung von Schwerfälligkeiten des Ausdrucks die Idee eines *sphärischen* Dreiecks, bei dem ja alle Seiten reell sind, zugrunde gelegt.

Zweitens heften wir den Blättern $\mathfrak{B}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_{n-1}$ und damit der Fläche F in den zur Ecke A_1 gehörenden Punkten $A_{1\,n+1}$ des Blattes $\mathfrak{B}_{n+1}$ und $A_{1\,n-1}$ des Blattes $\mathfrak{B}_{n-1}$ ein neues Blatt $\mathfrak{B}^{(n)}$ derart an, daß der zur Seite A_3A_1 gehörende Vollkreis $k^{(n)}$ des Blattes $\mathfrak{B}^{(n)}$ von seinem in der Ecke A_1 liegenden Punkt $A_{1(n)}$ zum Punkt $A_{1\,n+1}$ führt und die Punkte $A_{1(n)}$ und $A_{1\,n-1}$ durch eine eingefügte Windung in A_1 miteinander zusammenhängen. Die Windungen, durch die $\mathfrak{B}_n$ an $\mathfrak{B}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_{n-1}$ befestigt war, werden herausgenommen. Sollte (in einzelnen Fällen) $\mathfrak{B}_n$ nur durch diese Windungen mit F zusammenhängen, so lassen wir dieses Blatt ganz weg.

Im Ausnahmefall ist $n=0$ und es wäre, wenn wir die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, das neue Blatt $\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}_n$. Dies heften wir wie im allgemeinen Fall mit Hilfe des in $\mathfrak{B}_0$ liegenden Vollkreises k_0 und durch eine von A_{11} nach A_{10} führende Windung an $\mathfrak{B}_1$ an. Dann aber wird $\mathfrak{B}_0$ noch durch einen in ihm und auf dem zu A_3A_1 gehörenden Kreisbogen liegenden Vollkreis $k^{(0)}$ an $\mathfrak{B}_0$ angeknüpft und die neue Windung wieder herausgenommen.

Durch Anheftung von $\mathfrak{B}_0$ an $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ an $\mathfrak{B}_{n-1}$ bzw. im Ausnahmefall durch Doppelanheftung von $\mathfrak{B}_0$ an $\mathfrak{B}_1$ entsteht aus F eine neue Fläche F'. Auf ihr bildet der geschlossene Linienzug

$$\underbrace{A_{10}A_{11}}_{k_0}A_2A_3\underbrace{A_{1\,n+1}\underbrace{A_{1(n)}}_{k^{(n)}\ \alpha_1\pi}A_{10}}\,,\qquad{}^{14a})$$

bei dem A_2 und A_3 die auf bestimmten Blättern von F liegenden Ecken des Dreiecks Δ bedeuten, die Berandung eines Kreisbogendreiecks Δ' mit den Bestimmungsstücken $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $a_1\pi$, $(a_2+2)\pi$, $(a_3+2)\pi$, weil die Ecke A_1 hier vom Blatt $\mathfrak{B}_0$ durch die Blätter $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{n-1}$ ins Blatt $\mathfrak{B}^{(n)}$ führt, also wieder ein n-facher Windungspunkt ist, und weil die Länge eines vollen Kreises nach unserer Maßbestimmung gleich 2π ist. In F' haben wir also für Δ' eine Fläche gefunden, auf der die Vermutung I gilt.

In die Berandung von Δ' spannen wir *erstens* sämtliche Membranstücke ein, die in die Berandung von Δ eingespannt waren, und im allgemeinen Fall *zweitens* die zur Linken von k_0 im Blatt $\mathfrak{B}_0$ liegende und die zur Rechten von $k^{(n)}$ im Blatt $\mathfrak{B}^{(n)}$ liegende Vollkreisfläche als neue Membranstücke. Im Ausnahmefall bilden die beiden Vollkreise k_0 und $k^{(0)}$ des Blattes $\mathfrak{B}_0$ vier Zweiecke (Fig. 1); in dasjenige, das sowohl k_0 als auch $k^{(0)}$

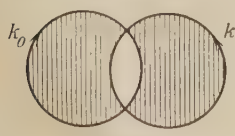


Fig. 1.

[14a]) Im Ausnahmefall ist hier überall an Stelle von n die Zahl 0 zu setzen.

zur Linken liegt, und in dasjenige, das sowohl k_0 als auch $k^{(0)}$ zur Rechten liegt, spannen wir neue Membranstücke ein, die wir noch Δ' zuweisen.

Bei Δ' kommt zum Gesamtflächeninhalt von Δ im allgemeinen Fall noch eine zur Linken und eine zur Rechten der Berandung liegende Vollkreisfläche, im Ausnahmefall noch eine zur Linken und eine zur Rechten liegende Zweiecksfläche — beide mit dem gleichen Öffnungswinkel. Die algebraische Summe der hinzukommenden Flächeninhalte hebt sich nach Vermutung III und Anm. [2]) auf, so daß der Gesamtflächeninhalt von Δ' mit dem von Δ übereinstimmt und also, da die Winkel der beiden Dreiecke gleich sind, nicht nur die Eigenschaften der Vermutung II, sondern auch die der Vermutung III für Δ' gelten: Δ' ist ein Flächendreieck.

D. h. wendet man auf die Seiten eines Dreiecks, das man geometrisch als Flächendreieck darstellen kann, eine Substitution (3a) an, so erhält man wiederum ein Dreieck, das in der Gestalt eines Flächendreiecks dargestellt werden kann.

§ 4.

Die Membranstücke, die in Vollkreise eingehängt werden können.

Bei Ausführung der Konstruktionen, die denen des vorigen Paragraphen entsprechen, aber zu den Substitutionen (3b) gehören, wird es darauf ankommen, Vollkreise von den Dreiecksberandungen und die in sie eingehängten Membranteile von der Gesamtfläche abzutrennen. Hier soll zunächst die Vorfrage erörtert werden, welche Membranteile denn überhaupt in das Blatt eines solchen Vollkreises eingespannt sein könnten.

Fr. Schilling[15]) geht bei Konstruktion der Membrandreiecke von sogenannten „reduzierten Dreiecken“ aus. Von ihnen hat nur der durch Fig. 2 dargestellte Typ eine Seite, die einen vollen Kreis k enthält. Der zugehörige Membranteil des Blattes, in dem k liegt, hat die Gestalt einer Vollkreisfläche, aus der ein Zweieck σ herausgeschnitten ist (Fig. 3); er liegt zur Linken der Dreiecksberandung.

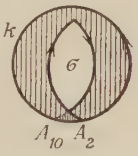


Fig. 2.

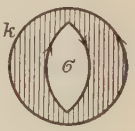


Fig. 3.

Beim Aufbau der Gesamtheit der Membrandreiecke entsteht ein weiterer Vollkreis nur bei „polarer Anhängung“ einer Vollkreisfläche. Durch sie wird der Dreiecksmembran zur Linken des neuen Vollkreises k eine volle Kreisfläche zugefügt.

Durch die Konstruktionen des vorigen Paragraphen werden dem Dreieck im allgemeinen Fall jeweils zwei neue Vollkreise und zwei neue Voll-

[15]) a. a. O. S. 217ff. Vgl. auch F. Klein a. a. O.

kreisflächen, deren eine zur Linken, deren andere zur Rechten der Berandung liegt, zugefügt, im Ausnahmefall jedoch zwei neue Vollkreise eines Blattes und zwei neue, in sie eingehängte *Zweiecksflächen* des nämlichen Blattes, deren eine zur Linken, deren andere zur Rechten der Berandung liegt.

Die Substitutionen (3b), die wir im nächsten Paragraphen besprechen, lassen keine neuen Vollkreise entstehen, weil keine Vermehrung irgendeiner Seite um 2π mehr stattfindet. Vermeidet man nun bei den weiteren Konstruktionen — was im folgenden Paragraphen, wie man leicht erkennt, beachtet ist —, daß die in vorhandene Vollkreise, die nicht etwa abgetrennt werden sollen, eingehängten Membranteile irgendwie verändert werden, so hat man also im ganzen nur vier Fälle zu unterscheiden:

1. Dem Vollkreis k gehört ein Vollkreismembranteil zur Linken zu.

2. Dem Vollkreis k gehört ein Vollkreismembranteil zur Rechten zu.

3. Dem Vollkreis k gehört ein um ein Zweieck verminderter Vollkreismembranteil zu (Fig. 3).

4. Zwei in einem Blatt liegenden Vollkreisen k_0 und $k^{(0)}$ gehören zwei Zweiecksmembranteile — einer zur Linken, einer zur Rechten — zu Fig. 1).

§ 5.

Die Substitution (3b).

Wir wenden uns den noch fehlenden Konstruktionen zu. Auch hier gehen wir von dem Flächendreieck Δ des § 3 aus; doch bezeichnen wir etzt die Blätter der Fläche F, durch die sich der n-fache Windungspunkt A_1 hindurchzieht, mit $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_n$.[16]) Außerdem dürfen wir voraussetzen, daß $a_2 \geqq 2$ und $a_3 \geqq 2$ ist.

Zunächst betrachten wir wieder den allgemeinen Fall, in dem $\boldsymbol{n > 0}$ ist.

Gehen wir hier *erstens* von dem zur Ecke A_1 gehörenden Punkt A_{10} des Blattes $\mathfrak{B}_0$ auf der Seite $A_1 A_2$, also auf der Berandung von Δ um einen vollen Kreis weiter, so gelangen wir in einen Punkt $A_{11'}$ eines anderen Blattes von F, das wir $\mathfrak{B}_{1'}$ nennen wollen. Die Blätter $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_{1'}$ heften wir so aneinander, daß die zu $A_1 A_2$ gehörenden Kreise beider Blätter übereinander zu liegen kommen und in den Punkten A_{11} und $A_{11'}$, in denen wir die beiden Kreise aneinander knüpfen, zusammenfallen. Nunmehr nehmen wir noch die vom Blatt $\mathfrak{B}_1$ zum Blatt $\mathfrak{B}_0$ (also von A_{11} zu A_{10}) führende Windung der Ecke A_1 und den Vollkreis $k_0 = A_{10} A_{11'}$

[16]) Wäre etwa das Dreieck durch eine Konstruktion nach § 3 entstanden, so würde das dortige Blatt $\mathfrak{B}^{(n)}$ hier als Blatt $\mathfrak{B}_n$ bezeichnet werden müssen.

des Blattes $\mathfrak{B}_0$ heraus. War $\mathfrak{B}_0$ ausschließlich durch jene Windung und diesen Kreis an F angeschlossen, so nehmen wir das ganze Blatt $\mathfrak{B}_0$ heraus. Das Schlußresultat des § 4 zeigt, daß das Blatt $\mathfrak{B}_0$ nur dann beibehalten werden muß, wenn für k_0 der Fall 3 jenes Paragraphen vorgelegen hat.

Zweitens wenden wir uns dem letzten vollen Umlauf der Seite $A_3 A_1$ (Kreis k_n des Blattes $\mathfrak{B}_n$) zu; er führt von dem zu A_1 gehörenden Punkt $A_{1\,n+1}$ eines Blattes, das wir $\mathfrak{B}_{n+1}$ nennen wollen, zu dem zu A_1 gehörenden Punkt $A_{1\,n}$ von $\mathfrak{B}_n$. Dann verbinden wir die Blätter $\mathfrak{B}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_n$ durch eine von $\mathfrak{B}_{n+1}$ nach $\mathfrak{B}_n$ (also von $A_{1\,n+1}$ zu $A_{1\,n}$) führende Windung der Ecke A_1 und nehmen den Vollkreis $k_n = A_{1\,n+1} A_{1\,n}$ des Blattes $\mathfrak{B}_n$ heraus.

Sollte der Fläche F von vornherein ein Blatt $\mathfrak{B}_{n'}$ angehören, das in irgendeiner Weise die Blätter $\mathfrak{B}_{n-1}$ und $\mathfrak{B}_{n+1}$ miteinander verbindet, so könnte man, statt die besprochene Konstruktion auszuführen, $\mathfrak{B}_{n'}$ durch ein von $\mathfrak{B}_{n-1}$ nach $\mathfrak{B}_{n'}$ und eine von $\mathfrak{B}_{n'}$ nach $\mathfrak{B}_{n+1}$ führende Windung in A_1 noch einmal an F anschließen und dafür das ganze Blatt $\mathfrak{B}_n$ mit seinem Vollkreis k_n herausnehmen (das wäre dann die Umkehrung der letzten Konstruktion für den allgemeinen Fall im § 3!).

Im Ausnahmefall ist $n = 0$ und es würde $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{1'}$. Im Blatt $\mathfrak{B}_0$ liegt ein voller Kreis k_0 der Seite $A_1 A_2$ und ein voller Kreis $k^{(0)}$ der Seite $A_3 A_1$. Wir nehmen beide Kreise und das Blatt $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_n$, das nur durch diese Kreise an F angeschlossen sein kann, aus F heraus. Man überzeugt sich schon hier, daß dabei nur der Fall 4 des vorigen Paragraphen vorgelegen haben kann.

Auf der im allgemeinen Fall durch Zusammenheftung der Blätter $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_{1'}$ [17]) bzw. $\mathfrak{B}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_n$ [17]), im Ausnahmefall Abtrennung des Blattes $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_0$ neu entstandenen Fläche F betrachten wir den Linienzug

$$\underbrace{A_{11'} A_2}_{(a_3-2)\pi}\ \underbrace{A_3 \underbrace{A_{1\,n+1} \underbrace{A_{11}}_{\alpha_1\pi}}_{(a_2-2)\pi}}\ \text{[18])}$$

der geschlossen ist, weil $A_{11} = A_{11'}$ ist.

Er bildet die Berandung eines Kreisbogendreiecks Δ'' mit den Bestimmungsstücken $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $a_1\pi$, $(a_2-2)\pi$, $(a_3-2)\pi$. In F'' haben wir also für Δ'' eine Fläche gefunden, auf der die Vermutung I gilt. Δ'' ist überdies aus Δ durch die Substitution (3 b) entstanden.

---

[17]) Damit kann unter Umständen eine Abtrennung des Blattes $\mathfrak{B}_0$ bzw. $\mathfrak{B}_n$ verbunden sein.

[18]) A_2 und A_3 seien wieder die in ganz bestimmten Blättern liegenden Endpunkte der Seiten $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$; es ist $A_{11'} A_2 = A_{10} A_2 - 2\pi$ und $A_3 A_{1\,n+1} - A_3 A_{1\,n} - 2\pi$, weil aus den Seiten jeweils ein Vollkreis, dessen Länge nach unserer Maßbestimmung gleich 2π ist, herausgenommen wurde. — Im Ausnahmefall muß in dem Schema des Textes $A_{1\,n+1}$ durch A_{11} ersetzt werden.

In die Berandung von Δ'' hängen wir zunächst sämtliche dem Dreieck Δ zugehörenden Membranteile ein, soweit sie nicht den Blättern $\mathfrak{B}_0$ oder $\mathfrak{B}_n$ angehört hatten.

Im Ausnahmefall, bei dem für die vorkommenden Vollkreise stets der Fall 4 des § 4 vorliegt, ist damit die Konstruktion abgeschlossen.

Im allgemeinen Fall müssen wir — um nachher auch die Vermutung III zu befriedigen — unter Umständen noch weitere Membranteile hinzufügen.

Wenn nämlich für k_0 der Fall 2 des § 4 vorliegt, nehmen wir das ganze Blatt $\mathfrak{B}_0$ als einen zur Rechten der Berandung liegenden Membranteil hinzu, indem wir das Blatt ohne Windung an A_1 anhängen.

Oder wenn für k_0 der Fall 3 des § 3 vorliegt (Fig. 3), nehmen wir aus dem Blatt $\mathfrak{B}_0$ noch den zur Rechten der Berandung liegenden Teil σ, der in der Figur nicht geschrafft ist, hinzu.

Und wenn ferner für k_n der Fall 1 vorliegt, nehmen wir das ganze Blatt $\mathfrak{B}_n$, durch das sich der Windungspunkt hindurchzieht, als einen zur Linken der Berandung liegenden Membranteil.

Wenn schließlich für k_n der Fall 3 vorliegt, nehmen wir, wie vorher, das ganze Blatt $\mathfrak{B}_n$ aber diesmal ausschließlich des Zweiecks σ (Fig. 3) als einen zur Linken der Berandung liegenden Membranteil hinzu.

Nur wenn für k_0 der Fall 1 oder für k_n der Fall 2 des § 4 vorliegt, soll zu den vorhandenen Membranteilen nichts mehr hinzugenommen werden.

Damit haben wir in allen Fällen für Δ'' eine Konstruktionsvorschrift gegeben, durch die dieses Dreieck jedenfalls der Vermutung II entspricht.

Nunmehr handelt es sich noch um die Bestimmung des Gesamtflächeninhaltes des so konstruierten Dreiecks.

Dabei wenden wir uns zunächst dem allgemeinen Fall zu und betrachten erstens die Änderungen, die der in $\mathfrak{B}_0$ liegende Membranteil M_0 beim Übergang von Δ zu Δ'' erfährt.

Tritt für k_0 der Fall 1 des § 4 ein, so hat M_0 bei Δ den Flächeninhalt 2π, bei Δ'' den Flächeninhalt 0.

Tritt der Fall 2 ein, so muß bei Δ der Flächeninhalt von M_0 mit -2π, bei Δ'' mit -4π eingesetzt werden.

Im Falle 3 ist bei Δ der Flächeninhalt von M_0 gleich $2\pi - \sigma$, wenn wir den Flächeninhalt von σ selbst mit σ bezeichnen; bei Δ'' muß er mit $-\sigma$ eingesetzt werden.

Die Änderung, die zweitens der Flächeninhalt des in $\mathfrak{B}_n$ liegenden Membranteiles M_n erfährt, ergibt sich folgendermaßen:

Tritt für k_n der Fall 1 des § 4 ein, so hat M_n bei Δ den Flächeninhalt 2π, bei Δ'' aber 4π.

Tritt der Fall 2 ein, so muß bei Δ der Flächeninhalt von M_n mit mit -2π eingesetzt werden, während er bei Δ'' 0 ist.

Im Fall 3 ist der Flächeninhalt von M_n bei Δ gleich $2\pi - \sigma$, bei Δ'' gleich $4\pi - \sigma$.

Wir sehen also, daß stets der Flächeninhalt von M_0 um 2π abnimmt, der von M_n um 2π wächst.

Im Ausnahmefall fällt das Blatt $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_n$ mit den beiden Zweiecken, deren Flächeninhalt gleich groß, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen einzusetzen ist, beim Übergang von Δ zu Δ'' weg.

Da nun, abgesehen von den Blättern $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_n$ bzw. dem Blatte $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_n$, die in Δ'' enthaltenen Membranteile die nämlichen sind wie die des Blattes Δ, so ersieht man, daß auch der Gesamtflächeninhalt von Δ'' gleich dem von Δ ist. Da außerdem die Winkel beider Dreiecke gleich sind, so ist auch für Δ'' die Vermutung III richtig, wenn sie für Δ richtig ist. Das heißt aber, *daß Δ'' ein Flächendreieck ist.*

Es mag noch einmal betont werden, daß die Konstruktionen dieses Paragraphen, wie es im vorigen verlangt war, die im Vollkreise eingehängten Membranteile mit Ausnahme derjenigen, die den abgetrennten Vollkreisen k_0 und k_n bzw. k_0 und $k^{(0)}$ angehören, ungeändert lassen.

Wir haben somit in den Paragraphen 3 und 5 gezeigt, daß man alle Kreisbogendreiecke, die dadurch aus *Flächendreiecken* erzeugt wurden, daß man auf sie in beliebiger Kombination Substitutionen (3) ausgeübt hat, als Flächendreiecke darstellen kann. Da nun alle Membrandreiecke Flächendreiecke sind und nach § 2 alle eigentlichen im Wesentlichen allein durch Substitutionen (3) aus Membrandreiecken aufgebaut werden konnten, so können wir sicherlich zu jedem eigentlichen ein Flächendreieck auffinden. Das ist aber gerade die Bestätigung der Kleinschen Vermutungen.

Abgeschlossen am 17. Oktober 1927.

(Eingegangen am 20. Oktober 1927.)

Über wiederholte Quadraturen.

Von

Rudolf Rothe in Berlin.

Im folgenden teile ich einige Untersuchungen mit, die ich über die reelle Funktionenfolge

$$F_n(x) = \int_{z_{n-1}=a}^{x} \int_{z_{n-2}=a}^{z_{n-1}} \dots \int_{z=a}^{z_1} F(z)\, dz\, dz_1 \dots dz_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

angestellt habe, worin a einen festen Wert oder auch ∞ bezeichnen kann [1]). Einige der abgeleiteten Formeln sind schon bei Cauchy, Jacobi u. a. zu finden und werden gelegentlich in der Theorie der Integralgleichungen benutzt; andere scheinen bisher noch unbeachtet zu sein. Eine Reihe von Anwendungen zeigt ihre Brauchbarkeit.

Es wird sich besonders auch um unendliche Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$$

handeln, worin die Größen $a_0, a_1, \dots$ Konstanten oder auch Funktionen von x oder von anderen Veränderlichen bedeuten. Ich nenne solche Reihen nach Quadraturen von $F(x)$ fortschreitend oder kurz *Quadraturreihen*. Sie hängen aufs engste mit den Entwicklungen von der Form

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

zusammen, die nach dem heutigen Sprachgebrauch die Funktionen $a_n(x)$ „erzeugen". Zum Schluß werden einige Anwendungen auf die Integration der Telegraphengleichung kurz mitgeteilt.

---

[1]) Von den uneigentlichen wiederholten Integralen wird in der vorliegenden Abhandlung nur gelegentlich, in den Nummern **3** nnd **4**, die Rede sein. Ich gedenke später darauf zurückzukommen.

1. Mehrfach wiederholtes Integral. Es sei $f(x)$ eine im abgeschlossenen Bereiche $a \leqq x \leqq b$ der reellen Veränderlichen x überall definierte, beschränkte und (im Riemannschen Sinne) integrable Funktion, und es werde

$$(1) \qquad \int_a^x f(z)\,dz = F(x) = F_0(x)$$

gesetzt. Dann ist auch $F(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ integrabel, sogar stetig, und man kann die unendliche Folge integrierbarer Funktionen bilden

$$(2) \qquad \int_a^x F_{\mu-1}(z)\,dz = F_\mu(x), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

für die $x = a$ eine mindestens $(\mu+1)$-fache Nullstelle ist:

$$F_\mu(a) = 0.$$

$F_\mu(x)$ soll das μ-fach wiederholte oder auch das $(\mu+1)$-te Integral von $f(x)$ mit fester unterer Grenze a heißen und manchmal mit

$$F_\mu(x) = {}^{(\mu+1)}\int_a^x f(z)\,dz^{\mu+1} = {}^{(\mu)}\int_a^x F(z)\,dz^\mu = F^{(-\mu)}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

bezeichnet werden. $F_\mu(x)$ ist für $a \leqq x \leqq b$ μ-mal differenzierbar, und es ist

$$3) \qquad F'_\mu(x) = F_{\mu-1}(x) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß *die Folge*

$$F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x), \ldots$$

eine Nullfolge ist, d. h.

$$(4) \qquad \lim_{\mu\to\infty} F_\mu(x) = \lim_{\mu\to\infty} {}^{(\mu+1)}\int_a^x f(z)\,dz^{\mu+1} = 0.$$

Da nämlich $F(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ beschränkt ist, etwa $m < F(x) < M$, so hat man

$$(5) \qquad \begin{cases} m(x-a) < F_1(x) < M(x-a) \leqq M(b-a) \\ m\frac{(x-a)^2}{2!} < F_2(x) < M\frac{(x-a)^2}{2!} \leqq M\frac{(b-a)^2}{2!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m\frac{(x-a)^\mu}{\mu!} < F_\mu(x) < M\frac{(x-a)^\mu}{\mu!} \leqq M\frac{(b-a)^\mu}{\mu!}, \end{cases}$$

woraus sofort die Behauptung folgt [2]) und zugleich ersichtlich ist, daß die Annäherung an den Grenzwert 0 *gleichmäßig* erfolgt.

---

[2]) Diese einfache Bemerkung drückt diejenigen Eigenschaften des Integralprozesses aus, die man geometrisch als „Verflachung" der zu integrierenden Kurve leicht deuten kann. Sie sollte eigentlich in keinem Lehrbuch der Integralrechnung fehlen, aber

(Fortsetzung der Fußnote [2]) auf nächster Seite.)

2. Statt von dem Integral (1) wird im folgenden in der Regel von einer Funktion $F(x)$ ausgegangen werden, von der nur vorausgesetzt werden soll, daß sie für $a \leqq x \leqq b$ beschränkt und von beschränkter Schwankung sei; sie ist dann integrabel, es existiert also

$$F_1(x) = \int_a^x F(x)\,dx,$$

diese Funktion ist aber im allgemeinen nur stetig, nicht differenzierbar. In diesem Falle gilt also die Formel (3) im allgemeinen erst von $\mu = 2$ an.

Hat $F(x)$ die weitere Eigenschaft, beschränkt und von beschränkter Schwankung für $a \leqq x \leqq b$ zu sein, und ist $\varphi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ beschränkt und stückweise stetig, jedoch so, daß etwaige Unstetigkeitsstellen von $F(x)$ und $\varphi(x)$ niemals zusammenfallen, dann existiert bekanntlich das Stieltjessche Integral

$$(6) \qquad S(x) = \int_a^x \varphi(z)\,dF(z) = \lim \sum_{\lambda=0}^{n} \varphi(\xi_\lambda)(F(x_{\lambda+1}) - F(x_\lambda)),$$

worin $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} = x$ eine Teilung des Integrationsbereiches $(a \ldots x)$ in $n+1$ Teile bedeutet, $x_\lambda < \xi_\lambda < x_{\lambda+1}$ sein soll, und der Grenzübergang sich darauf bezieht, daß zugleich $n \to \infty$ und $\mathrm{Max}\,|x_{\lambda+1} - x_\lambda| \to 0$ konvergieren. Übrigens ist $S(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ beschränkt und stückweise stetig, und man hat ferner

$$(7) \qquad m\sigma(F) < S(x) < M\sigma(F),$$

wo m und M eine untere und obere Schranke von $\varphi(x)$, und $\sigma(F)$ die Gesamtschwankung von $F(x)$ im Integrationsbereiche $(a \ldots x)$ bedeuten. Aus (6) läßt sich bekanntlich die Gültigkeit der Teilintegration für Stieltjessche Integrale beweisen, falls auch $\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung ist:

$$(8) \qquad \int_a^x \varphi(z)\,dF(z) = \varphi(x)\,F(x) - \varphi(a)\,F(a) - \int_a^x F(z)\,d\varphi(z),$$

wo auf der rechten Seite wiederum ein Stieltjessches Integral steht.

3. Mehrfach wiederholtes uneigentliches Integral. Man betrachte nun einen Integrationsprozeß

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^x f(z)\,dz = U(x),$$

---

man findet sie dort nirgends, obwohl in der Theorie der Integralgleichungen doch davon Gebrauch gemacht wird.

Um eine naheliegende Anwendung zu haben, braucht man z. B. nur $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \sin x$ zu setzen, um daraus sofort die bekannten Potenzreihen für e^x, $\cos x$, $\sin x$ zu erhalten.

setze also voraus, daß $f(x)$ für $-\infty < x \leqq b$ in der Weise integrabel sei, daß der Grenzwert

$$\lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{x} f(z)\,dz = U_0(x) = U(x)$$

existiere. $U_0(x)$ ist dann stetig, denn es ist

$$U_0(x) = \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz + \int_{a}^{x} f(z)\,dz = U_0(a) + F(x), \tag{10}$$

und auch beschränkt für alle $-\infty < x \leqq b$ wegen $\lim_{x \to -\infty} U_0(x) = 0$. Es werde ferner angenommen, $f(x)$ sei so beschaffen, daß nicht nur $U_0(x)$, sondern auch sämtliche Funktionen der unendlichen Folge

$$U_1(x) = \int_{-\infty}^{x} U(z)\,dz, \qquad U_2(x) = \int_{-\infty}^{x} U_1(z)\,dz, \ldots \tag{11}$$

vorhanden sind. Man hat dann

$$U'_\mu(x) = U_{\mu-1}(x), \tag{12}$$

ferner $\lim_{x \to -\infty} U_\mu(x) = 0$ und entsprechend (10):

$$U_1(x) = U_1(a) + \int_{a}^{x} U_0(z)\,dz \qquad U_1(a) + U_0(a)(x-a) + \int_{a}^{x} F(z)\,dz$$
$$= U_1(a) + U_0(a)(x-a) + F_1(x).$$

Durch Schluß von μ auf $\mu+1$ zeigt man leicht:

$$U_\mu(x) = U_\mu(a) + \frac{x-a}{1!} U_{\mu-1}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^\mu}{\mu!} U_0(a) + F_\mu(x), \tag{13}$$

die Entwicklung von $U_\mu(x)$ nach der Taylorschen Formel. Sämtliche $U_\mu(x)$ sind gleichmäßig beschränkt im Bereiche $(-\infty \ldots b)$:

$$|U_\mu(x)| < K \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo K eine von x und μ unabhängige Konstante bedeutet, ja es gilt sogar

$$|x^n U_\mu(x)| < K \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

für *jeden* positiven Wert von n, andernfalls wäre nämlich $U_{\mu+n+1}(x)$ nicht beschränkt, wie man durch $(n+1)$-malige Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und x leicht zeigt. Infolgedessen ist auch

$$\lim_{x \to -\infty} (x^n U_\mu(x)) = 0 \tag{14}$$

für *jeden* positiven Wert von n.

4. Grenzfunktion. Ich will nun beweisen, daß wenn die $U_\mu(x)$ für $\mu \to +\infty$ einer Grenzfunktion

$$\lim_{\mu \to \infty} U_\mu(x) = G(x) \tag{15}$$

gleichmäßig zustreben, diese keine andere als

$$G(x) = Ce^x \tag{16}$$

sein kann, wobei C eine Konstante bedeutet, die auch den Wert Null haben kann.

Die Annahme (15) bedeutet genauer: zu jedem $\varepsilon > 0$ soll sich eine von x unabhängige Größe $\omega(\varepsilon)$ so angeben lassen, daß

$$|U_\mu(x) - G(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad \mu > \omega(\varepsilon) \tag{17}$$

wird.

Zum Beweise sei h eine von Null verschiedene Konstante derart, daß noch $x + h \leqq b$ ist. Dann folgt aus dem Mittelwertsatze wegen (12) für *jeden* Wert von h

$$\frac{U_\mu(x+h) - U_\mu(x)}{h} = U_{\mu-1}(x) + \frac{1}{2} h U_{\mu-2}(\xi), \tag{18}$$

worin $\xi = x + \vartheta_\mu h$ $(0 < \vartheta_\mu < 1)$ ist. Man setze zur Abkürzung

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - G(x) = \gamma(x, h), \tag{19}$$

so ist nach (17)

$$\left| \gamma(x,h) - \left(\frac{U_\mu(x+h) - U_\mu(x)}{h} - U'_\mu(x) \right) \right|$$

$$\leqq \left| \frac{G(x+h) - U_\mu(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{G(x) - U_\mu(x)}{h} \right| + |G(x) - U'_\mu(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{|h|} + \frac{\varepsilon}{|h|} + \varepsilon = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{|h|} \right) = \varepsilon_1(h),$$

oder nach (18)

$$\left| \gamma(x,h) - \frac{1}{2} h U_{\mu-2}(\xi) \right| < \varepsilon_1(h),$$

also wegen $|U_{\mu-2}(\xi)| < K$:

$$|\gamma(x,h)| < \frac{1}{2} |h| K + \varepsilon_1(h) \tag{20}$$

für jedes $|h|$ und für alle $\mu > \omega(\varepsilon)$. Die rechte Seite ist aber kleiner als jede beliebige Zahl $\delta\,(>0)$ zu machen. Man braucht dazu nur

$$|h| < \frac{\delta}{K} \quad \text{und danach} \quad \varepsilon < \frac{\delta K |h|}{2(\delta + 2K)}$$

zu wählen. Nach (19) besagt das aber nichts anderes als

$$G'(x) = G(x),$$

woraus die Behauptung (16) sofort folgt[3]).

5. Es bleibt noch nachzuweisen, daß der Grenzwert von einem $f(x)$ wirklich erreicht wird. Es sei

$$f(x) = c e^{\lambda x} \qquad (\lambda \geqq 1),$$

so hat man

$$U_\mu(x) = c \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{\mu+1}}$$

und weiter für $\mu \to \infty$

$$G(x) = c e^x, \quad \text{falls } \lambda = 1,$$
$$= 0, \quad \text{falls } \lambda > 1$$

ist. Selbstverständlich ist $f(x) = c e^x$ nicht die einzige Funktion, die bei fortgesetzter Integration von $-\infty$ bis x zum Grenzwert $c e^x$ führt, sondern z. B.

$$f(x) = c e^x + c_1 e^{\lambda x} \qquad (\lambda > 1)$$

bewirkt das ebenfalls; oder auch

$$f(x) = c e^x + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu x} \qquad (1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots),$$

wo die auf der rechten Seite stehende Reihe, wenn $\lambda_n \to +\infty$, eine Dirichletsche ist für die bekanntlich stets eine Abszisse B gefunden werden kann, so daß die Reihe für alle $x \leqq b < B$ *gleichmäßig* konvergiert.

6. Wiederholte unvollständige Integration. Es sei $F(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ beschränkt und von beschränkter Schwankung, überdies[4])

---

[3]) Die obige Beweisführung läßt sich mit geringen Abänderungen auf folgenden allgemeinen Satz anwenden: Ist für irgendeine Folge differenzierbarer Funktionen $U_\mu(x)$

a) $|U_\mu(x) - G(x)| < \varepsilon$ für alle $\mu > \omega(\varepsilon)$,

b) $|U'_\mu(x) - H(x)| < \varepsilon$ für alle $\mu > \omega_1(\varepsilon)$,

so ist $G(x)$ differenzierbar und $G'(x) = H(x)$. Zum Beweise hat man nur

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - H(x)$$

statt des obigen $\gamma(x,h)$ zu setzen und in der auf (19) folgenden Ungleichheit $|H(x) - U'_\mu(x)|$ an Stelle von $|G(x) - U'_\mu(x)|$ zu schreiben.

Herr Eberhard Hopf hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß aus diesem allgemeinen Satze der obige sofort zu folgern ist.

[4]) Diese Annahme ist unwesentlich.

$F(a) = 0$; ferner sei $\varphi(x)$ n-mal differenzierbar[5]. Dann gilt die Regel (8) der unvollständigen Integration für das Stieltjessche Integral

$$\int_a^x \varphi(z)\, dF(z) = \varphi(x) F(x) - \int_a^x F(z)\, d\varphi(z), \tag{21}$$

in n-facher Wiederholung mit den Bezeichnungen von **1.**:

$$\int_a^x \varphi(z)\, dF(z) = \varphi(x) F(x) - \varphi'(x) F_1(x) + \varphi''(x) F_2(x) - + \ldots + (-1)^n \varphi^{(n)}(x) F_n(x) + (-1)^{n+1} \int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z). \tag{22}$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite ist ein Stieltjessches Integral, wenn $\varphi^{(n)}(x)$ von beschränkter Schwankung ist. Wenn $\varphi(x)$ noch ein $(n+1)$-tes mal differenzierbar ist, hat man für dieses Integral

$$\int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z) = \int_a^x \varphi^{(n+1)}(z)\, dF_{n+1}(z); \tag{23}$$

wenn überdies $F(x)$ noch differenzierbar ist, dann läßt sich natürlich die Hilfsformel (22) sofort durch Differentiation beweisen[6].

Man kann daraus mehrere Folgerungen ziehen. Es sei

$$\varphi(z) = (x - z)^n \qquad (n > 0, \text{ ganz});$$

dann ist

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(x) = 0, \qquad \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!$$

Die Formel (22) liefert jetzt

$$\frac{1}{n!} \int_a^x (x - z)^n\, dF(z) = F_n(x), \tag{24}$$

eine in der Theorie der Integralgleichungen häufig gebrauchte Darstellung eines n-fach wiederholten Integrals durch ein einfaches (im allgemeinen aber Stieltjessches) Integral. Die Formel selbst ist schon lange bekannt[7].

8. Setzt man ferner in (22)

$$\varphi(z) = \frac{(x + h - z)^n}{n!}.$$

[5] Unter „differenzierbar“ soll immer verstanden werden, daß die Ableitung in $(a \leqq x \leqq b)$ existiert *und beschränkt* ist.

[6] Diese Formel geht im Grunde auf Kronecker zurück (Berliner Akad. Berichte 1884).

[7] Sie scheint auf Cauchy zurückzuführen zu sein. Vgl. z. B. Moigno-Cauchy, Vorlesungen über die Integralrechnung, deutsch von C. H. Schnuse, S. 76, Braunschweig 1846.

so wird

$$\varphi(x) = \frac{h^n}{n!}, \quad \varphi'(x) = -\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{h}{1!},$$
$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n,$$

somit

$$(25) \qquad \int_a^x \frac{(x+h-z)^n}{n!}\, dF(z) = F_n(x) + \frac{h}{1!} F_{n-1}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} F(x).$$

Nun ist aber nach (24) leicht

$$\int_a^x \frac{(x+h-z)^n}{n!}\, dF(z) = F_n(x+h) - \int_x^{x+h} \frac{(x+h-z)^n}{n!}\, dF(z),$$

mithin erhält man[8])

$$(26) \qquad F_n(x+h) = F_n(x) + \frac{h}{1!} F_{n-1}(x) + \frac{h^2}{2!} F_{n-2}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} F(x) + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-z)^n}{n!}\, dF(z).$$

Setzt man hierin $F_n(x) = \psi(x)$ und nimmt an, daß $\psi(x)$ n-mal differenzierbar sei, so stellt (26) nichts anderes als die *Taylorsche Formel* für $\psi(x)$ dar:

$$(27) \qquad \psi(x+h) = \psi(x) + \frac{h}{1!}\psi'(x) + \frac{h^2}{2!}\psi''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(x) + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-z)^n}{n!}\, d\psi^{(n)}(z),$$

vorausgesetzt, daß das Stieltjessche Integral des Restgliedes existiert, wozu hinreicht, daß $\psi^{(n)}(x)$ beschränkt und von beschränkter Schwankung sei[9]).

---

[8]) Diese Formel ist übrigens davon unabhängig, daß $F(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$ sämtlich bei $x = a$ verschwinden. Denn wenn bei der Bildung der wiederholten Integrale jedesmal eine Integrationskonstante hinzukommt, tritt schließlich zu $F_\mu(x)$ eine ganze Funktion $g_\mu(x)$ vom μ-ten Grade hinzu, wobei $g'_\mu(x) - g_{\mu-1}(x)$ ist. Aber es ist identisch

$$g_n(x+h) = g_n(x) + \frac{h}{1!} g_{n-1}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} g_0(x),$$

wo $g_0(x) = g_n^{(n)}(x)$ eine Konstante ist. Die Formel (26) bleibt also bestehen.

[9]) Das Vorhandensein einer $(n+1)$-ten Ableitung wird hierbei also nicht vorausgesetzt. Es gilt aber ein Satz von H. Lebesgue, daß jede Funktion von beschränkter Schwankung für $a \leqq x \leqq b$ auch in jedem Punkte dieses Bereiches eine endliche Ableitung besitzt, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null.

9. Man betrachte den Ausdruck[10])

$$A_n(x,h) = \left[F_n(x+h) - F_n(x) - \frac{h}{1!}F_{n-1}(x) - \ldots - \frac{h^n}{n!}F(x)\right] : \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \tag{28}$$

und nehme an, $F(x)$ *sei in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle* x, *in der auch* $x+h$ *liege, stetig,* dann ist in dieser Umgebung $F_1(x)$ differenzierbar. Wegen

$$F_\mu'(x) = F_{\mu-1}(x) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

wird mit wiederholter Anwendung der L'Hospitalschen Regel schließlich

$$\lim_{h\to 0} A_n(x,h) = \lim_{h\to 0} A_{n-1}(x,h) = \ldots = \lim_{h\to 0} A_0(x,h) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}. \tag{29}$$

Wenn $F(x)$ differenzierbar ist, stellt also der Grenzwert auf der linken Seite die Ableitung $F'(x)$ dar. Es kann vorkommen, daß, obwohl $F'(x)$ nicht existiert, der Grenzwert $\lim A_n(x,h)$ vorhanden ist; er kann daher als *Ersatz der Ableitung einer stetigen Funktion* dienen, falls die Ableitung nicht vorhanden ist.

Mit Hilfe von (26) läßt sich (29) auch in der Form

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{n+1}{h^{n+1}} \int_x^{x+h} (x+h-z)^n \, dF(z) \tag{30}$$

schreiben.

Beispiel[11]). $F(x) = x \sin\frac{1}{x} + 3x^2 \cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),\ F(0) = 0.$

Diese Funktion ist bei $x = 0$ stetig, hat aber dort keine Ableitung $F'(0)$. Es ist jedoch

$$F_1(x) = \int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x d\left(x^3 \cos\frac{1}{x}\right) = x^3 \cos\frac{1}{x}, \qquad F_1(0) = 0.$$

Damit wird nach (29) für $x = 0$

$$\lim_{h\to 0} A_1(0,h) = \lim_{h\to 0} \left(2h \cos\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Also kann die Ableitung $F'(0)$ durch den Wert Null ersetzt werden. Da übrigens wegen

$$F'(x) = 4 \sin\frac{1}{x} + \left(6x - \frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}$$

---

[10]) Vgl. E. Cesàro, L'Intermédiaire des Math. 4 (1897), S. 106, 184.

[11]) E. Cesàro, a. a. O.

nicht einmal $\lim F'(x)$ für $x \to 0$ existiert, so wird $F'(x)$ durch den Ersatzwert 0 für $F'(0)$ nicht stetig.

10. Restglied in (22). Man kann das Restglied der Formel (22) abschätzen. Nach (5) ist für $a \leqq x \leqq b$

$$m \frac{(x-a)^n}{n!} < F_n(x) < M \frac{(x-a)^n}{n!}, \tag{31}$$

mithin wird nach (7)

$$m \frac{(x-a)^n}{n!} \sigma(\varphi^{(n)}(x)) < \int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z) < M \frac{(x-a)^n}{n!} \sigma(\varphi^{(n)}(x))$$

oder

$$\left| \int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z) \right| \leqq M \frac{|x-a|^n}{n!} \sigma(\varphi^{(n)}(x)). \tag{32}$$

Eine andere und für das Folgende zweckmäßigere Abschätzung ist möglich, wenn $\varphi(x)$ noch ein $(n+1)$-tes mal stetig differenzierbar ist. Dann wird nämlich

$$\int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z) \leqq M \int_a^x \frac{(x-a)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(x)\, dx \leqq M |\varphi^{(n+1)}(\xi)| \int_a^x \frac{(x-a)^n}{n!} dx$$

oder

$$\left| \int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z) \right| \leqq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} |\varphi^{(n+1)}(\xi)|.$$

Wenn nun angenommen wird, $\varphi(x)$ sei *beliebig oft differenzierbar*, und es sei

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{(x-a)^n}{n!} \varphi^{(n)}(\xi) \right] = 0, \tag{33}$$

so ist auch

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x F_n(z)\, d\varphi^{(n)}(z) = 0,$$

daher nach (22)

$$\begin{aligned} &\int_{z=a}^{x} \varphi(z)\, dF(z) \qquad (34) \\ &= \lim_{n \to \infty} \{\varphi(x) F(x) - \varphi'(x) F_1(x) + - \ldots + (-1)^n \varphi^{(n)}(x) F_n(x)\} \\ &= \varphi(x) F(x) - \varphi'(x) F_1(x) + \varphi''(x) F_2(x) - + \ldots, \end{aligned}$$

und *die auf der rechten Seite stehende unendliche Reihe konvergiert für* $a \leqq x \leqq b$ *und stellt das linker Hand befindliche Integral wirklich dar.*

Da die $\varphi^{(n)}(x)$ sämtlich beschränkt sind [12]), etwa

$$|\varphi^{(n)}(x)| < a_n,$$

so konvergiert (34), wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n (x-a)^n}{n!} = 0 \tag{35}$$

ist. Im allgemeinen ist aber die Konvergenz nicht gleichmäßig. Wenn jedoch (35) in bezug auf x *gleichmäßig* erfüllt ist, d. h. wenn

$$\left| \frac{a_n (x-a)^n}{n!} \right| < \varepsilon$$

für alle $n > N(\varepsilon)$ unabhängig von x, im besonderen, wenn die Potenzreihe

$$y(x) = \sum_n a_n \frac{(x-a)^n}{n!} \tag{36}$$

für $a \leqq x \leqq b$ konvergiert, so konvergiert die Reihe (34) für $a < x < b$ gewiß *gleichmäßig*.

Das ist z. B. der Fall, wenn die $\varphi^{(n)}(x)$ in bezug auf n *gleichmäßig* beschränkt sind, d. h. wenn

$$|\varphi^{(n)}(x)| < A \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, wo A von n nicht abhängt; denn dann ist

$$y(x) < A e^{x-a} \leqq A e^{b-a}.$$

Übrigens ist die linke Seite von (33) dem Lagrangeschen Restgliede der Taylorschen Entwicklung für $\varphi(x)$ proportional. Die Reihe (34) gilt also gewiß dann, wenn $\varphi(x)$ nach Potenzen von $x - a$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann.

11. Anwendungen der Formel (34). Für $\varphi(z) = e^{-\lambda z}$ erhält man aus (34)

$$\int_{z=a}^{x} e^{\lambda(x-z)}\, dF(z) = F(x) + \lambda F_1(x) + \lambda^2 F_2(x) + \ldots, \tag{37}$$

und diese Reihe konvergiert für jeden Wert von λ gleichmäßig, weil

$$|\varphi^{(n)}(x)| = |\lambda|^n e^{-\lambda x} < |\lambda|^n B$$

ist, wo B den größeren der beiden Werte $e^{-\lambda a}$ oder $e^{-\lambda b}$ bedeutet, und also die Potenzreihe (36)

$$y(x) = B \sum_n \lambda^n \frac{(x-a)^n}{n!} = B e^{\lambda(x-a)}$$

[12]) Vgl. die Fußnote [4]).

konvergiert. Insbesondere ergibt sich für $\lambda = 1$ aus (37)

$$(38) \qquad \int_{z=a}^{x} e^{x-z}\, dF(z) = F(x) + F_1(x) + F_2(x) + \ldots$$

und für $\lambda = -1$

$$(38a) \qquad \int_{z=a}^{x} e^{z}\, dF(z) = e^{x}(F(x) - F_1(x) + F_2(x) - + \ldots).$$

Ebenso leicht findet man

$$(39) \qquad \int_{z=a}^{x} \cos\lambda(x-z)\, dF(z) = F(x) - \lambda^2 F_2(x) + \lambda^4 F_4(x) - + \ldots,$$

$$(40) \qquad \int_{z=a}^{x} \sin\lambda(x-z)\, dF(z) = \lambda F_1(x) - \lambda^3 F_3(x) + \lambda^5 F_5(x) - + \ldots .$$

Setzt man hierin $F(x)$ als differenzierbar voraus, und, wie in **1.**,

$$dF(x) = f(x)\, dx,$$

nimmt ferner $a = 0$, $x = 2\pi$, so erhält man, unter λ eine ganze positive Zahl verstehend,

$$(41) \qquad \int_{0}^{2\pi} \cos\lambda z\, f(z)\, dz = F(2\pi) - \lambda^2 F_2(2\pi) + \lambda^4 F_4(2\pi) - + \ldots,$$

$$(42) \qquad \int_{0}^{2\pi} \sin\lambda z\, f(z)\, dz = -\lambda F_1(2\pi) + \lambda^3 F_3(2\pi) - \lambda^5 F_5(2\pi) + - \ldots,$$

zwei bemerkenswerte Formeln für die Euler-Fourierschen Zahlen.

Bei festem Wert von x stellt die linke Seite von (37) eine Laplacesche Transformation dar, durch die aus $F(z)$ eine Funktion $G(\lambda)$ erzeugt wird.

Man kann übrigens (37) unter der Annahme, $F(x)$ sei differenzierbar, $dF(x) = f(x)\, dx$, sehr leicht gewinnen, indem man die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x)$$

mit der Anfangsbedingung, $y = y_0$ für $x = a$ nach dem Verfahren der aufeinander folgenden Näherungen durch Quadraturen integriert und diese Lösung der bekannten

$$y = y_0\, e^{\lambda(x-a)} + e^{\lambda x} \int_{z=a}^{x} e^{-\lambda z} f(z)\, dz$$

gleichsetzt.

12. Quadraturreihen. Die rechten Seiten der soeben entwickelten Gleichungen sind konvergente Reihen von der Form

$$a_0 F(x) + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots,$$

wo die Größen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Konstanten oder auch Funktionen von x bedeuten. Eine solche Reihe soll im folgenden eine nach wiederholten Quadraturen von $F(x)$ fortschreitende oder kurz eine *Quadraturreihe* von $F(x)$ genannt werden; sie konvergiert bei konstantem a_n, und zwar absolut und gleichmäßig für $a < x < b$, wenn die Potenzreihe (36) in diesem Bereiche konvergiert; denn es ist nach (5) die Reihe

$$M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{(b-a)^n}{n!}$$

eine Oberreihe der Reihe der Absolutglieder von (43).

Nun seien $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots$ eine unendliche Folge von Funktionen, die sich auch auf Konstanten reduzieren können, von der Beschaffenheit, daß für jeden festen Wert von x im Bereiche $a \leqq x \leqq b$ die Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x) \frac{t^\mu}{\mu!} = p(x, t) \tag{44}$$

für alle Werte von $|t|$ unterhalb einer gewissen Schranke konvergiert[13]). Sie stellt dann bei festem x eine stetige Funktion von t, und also auch von $z = x - t$ dar; demnach existiert das Stieltjessche Integral

$$\int_{z=a}^{x} p(x, x-z)\, dF(z),$$

vorausgesetzt, daß der Konvergenzradius der Reihe (44) mindestens gleich $b - a$ ist. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (44) folgt, daß die Stieltjesschen Integrale der einzelnen Glieder summiert werden dürfen, und man erhält so nach (24) die Quadraturreihe

$$\int_{z=a}^{x} p(x, x-z)\, dF(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x)\, F_\mu(x). \tag{45}$$

Eine leichte Überlegung zeigt, daß diese Formel auch in der erweiterten Gestalt

$$\int_{z=a}^{x} p(y, x-z)\, dF(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(y)\, F_\mu(x) \tag{46}$$

[13]) Man pflegt jetzt eine Funktion $\varphi(x, t)$ von der Form

$$\varphi(x, t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x) \frac{t^\mu}{\mu!}$$

die „erzeugende Funktion" der Entwicklungskoeffizienten $a_\mu(x)$ zu nennen. Vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, S. 69, Berlin 1924.

gilt, vorausgesetzt, daß die Potenzreihe $p(y, t)$ für jeden festen Wert von y eines Bereiches $c \leqq y \leqq d$ für alle $|t|$ unterhalb einer gewissen Schranke gleichmäßig konvergiert. Die Formel gilt sogar auch dann, wenn die Größen a_μ Funktionen mehrerer Variablen sind, vorausgesetzt, daß die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x, y, \ldots) \frac{t^\mu}{\mu!} = p(x, y, \ldots, t)$$

an jeder Stelle $(x, y, \ldots)$ eines abgeschlossenen Bereiches für alle $|t|$ unterhalb einer gewissen Schranke gleichmäßig konvergiert; man hat

$$\int_{z=a}^{x} p(x, y, \ldots, (x-z))\, dF(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x, y, \ldots) F_\mu(x).$$

Setzt man übrigens

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x-a) = \begin{cases} 0\ , & \text{wenn } x = a \text{ ist,} \\ +1, & \text{„ } x > a \text{ „ ,} \end{cases}$$

so wird

$$F_\mu(x) = \frac{(x-a)^\mu}{\mu!},$$

und man erhält aus (45)

$$\int_{z=a}^{x} p(x, x-z)\, d \operatorname{sgn}(z-a) = a_0(x) \operatorname{sgn}(x-a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(x) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}.$$

Nach der Definition des Stieltjesschen Integrals ist aber die linke Seite nichts anderes als $p(x, x-a) \cdot \operatorname{sgn}(x-a)$, wie es sein muß, da für $x = a$ die rechte wie die linke Seite verschwindet.

Nun ist aber nach (44) $a_0(x) = p(x, 0)$, daher

$$(p(x, x-a) - a_0(x)) \operatorname{sgn}(x-a) = p(x, x-a) - a_0(x);$$

mithin liefert die vorstehende Formel nichts anderes als das Ergebnis von (44) für $t = x - a$. Wenn die $a_\nu(x)$ Konstanten, $a_\nu(c)$ sind, erhält man also die Taylorsche Reihe von $p(c, x-a)$ nach Potenzen von $x - a$.

13. Einige Anwendungen werden die Wichtigkeit dieser Formeln erläutern.

a) Die Hermiteschen Polynome werden bekanntlich durch die Funktion

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{\mu=0}^{\infty} H_\mu(x) \frac{t^\mu}{\mu!}$$

erzeugt. Die Formel (45) liefert hierfür die Quadraturreihe

$$\int_{z=a}^{x} e^{-z^2}\, dF(z) = e^{-x^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} H_\mu(x) F_\mu(x),$$

eine Gleichung, die man natürlich auch unmittelbar aus (34) erhielte, wenn man von der Eigenschaft der Hermiteschen Polynome,

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n (e^{-x^2})^{(n)},$$

Gebrauch machte.

b) Für die Kugelfunktionen $P_n(x)$ gilt die Erzeugung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_\mu(x)\, t^\mu,$$

mithin ergibt (45)

$$\int_{z=a}^{x} \frac{dF(z)}{\sqrt{1-x^2+z^2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu!\, P_\mu(x)\, F_\mu(x).$$

c) Setzt man in (46) $a_\mu(y) = y^\mu$, so wird

$$p(y,t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{y^\mu t^\mu}{\mu!} = e^{ty},$$

mithin

$$\int_{z=a}^{x} e^{y(x-z)}\, dF(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} F_\mu(x)\, y^\mu, \tag{47}$$

was mit (37) übereinstimmt und auch für $x = y$ richtig ist.

d) Mit $a_\mu(y) = \frac{y^\mu}{\mu!}$ wird

$$p(y,t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(ty)^\mu}{(\mu!)^2} = J(ty), \tag{48}$$

wo $J(x)$ die der Differentialgleichung

$$xJ'' + J' - J = 0 \tag{49}$$

genügende Besselsche Funktion

$$J(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(\nu!)^2} \tag{50}$$

bedeutet. Aus (46) folgt jetzt die Quadraturreihe

$$\int_{z=a}^{x} J(y(x-z))\, dF(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} F_\mu(x) \frac{y^\mu}{\mu!}, \tag{51}$$

und diese Formel gilt auch für $y = x$. Die linke Seite *stellt die erzeugende Funktion für die wiederholten Integrale* $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... *selbst dar.*

14. Formeln für $\sum_{\mu=0}^{x} F_\mu(x)^2$ und $\sum_{\mu=0}^{x} F_\mu(x)\, F_\mu(y)$. Wendet man die letzte Bemerkung auf (45) mit $a_\mu(x) = F_\mu(x)$ an, so erhält man

$$(52)\qquad \int_{y=a}^{x}\int_{z=a}^{x} J((x-y)(x-z))\,dF(z)\,dF(y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}{}' F_\mu(x)^2,$$

allgemeiner nach (46)

$$(53)\qquad \int_{u=a}^{x}\int_{v=a}^{y} J((x-u)(y-v))\,dF(u)\,dF(v)=\sum_{\mu=0}^{\infty} F_\mu(x)\,F_\mu(y),$$

und wenn $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_\mu(x)$, ... die entsprechende Bedeutung und dieselben Eigenschaften haben wie $F(x)$, $F_1(x)$, ..., so hat man auch

$$(54)\qquad \int_{u=a}^{x}\int_{v=a}^{y} J((x-u)(y-v))\,dF(u)\,dG(v)=\sum_{\mu=0}^{\infty} F_\mu(x)\,G_\mu(y).$$

Mit Beziehung auf (47) beweist man leicht die entsprechenden Formeln

$$(55)\qquad \int_{y=a}^{x}\int_{z=a}^{x} e^{(x-y)(x-z)}\,dF(z)\,dF(y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \mu!\,F_\mu(x)^2,$$

$$(56)\qquad \int_{u=a}^{x}\int_{v=a}^{y} e^{(x-u)(y-v)}\,dF(u)\,dF(v)=\sum_{\mu=0}^{\infty} \mu!\,F_\mu(x)\,F_\mu(y),$$

$$(57)\qquad \int_{u=a}^{x}\int_{v=a}^{y} e^{(x-u)(y-v)}\,dF(u)\,dG(v)=\sum_{\mu=0}^{\infty} \mu!\,F_\mu(x)\,G_\mu(y).$$

15. Inneres Produkt zweier Funktionen $f(x)$, $g(x)$. Darunter versteht man das über einen Grundbereich genommene Integral

$$(58)\qquad \int_{a}^{b} f(x)\,g(x)\,dx=(f,g).$$

Um (f,g) durch wiederholte Integrale darzustellen, gehe man zurück auf (34) und setze wie in **1.**

$$dF(x)=f(x)\,dx,$$

dann folgt

$$(59)\qquad (f,g)=F(b)g(b)-F_1(b)g'(b)+F_2(b)g''(b)-+\ldots;$$

hierin ist für $a\leqq x\leqq b$ $f(x)$ als stückweise stetig und beschränkt, $g(x)$ dagegen als beliebig oft differenzierbar vorauszusetzen. Natürlich ist $(f,g)=(g,f)$, aber die Darstellung

$$(g,f)=G(b)f(b)-G_1(b)f'(b)+G_2(b)f''(b)-+\ldots,$$

worin $G(x)$, $G_1(x)$, ... die wiederholten Integrale von $g(x)$ mit der unteren Grenze a bedeuten, gilt nur unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ beliebig oft differenzierbar sei. Aus der Gleichheit der linken Seiten folgt dann

$$(60)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}{}'(-1)^\mu F_\mu(b)\,g^{(\mu)}(b)=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu f^{(\mu)}(b)\,G_\mu(b).$$

Man kann dieser Formel eine einfachere und symmetrischere Gestalt geben, wenn man sich der Bezeichnung

$$F_\mu(x) = F^{(-\mu)}(x) = f^{(-\mu-1)}(x)$$

bedient, also die wiederholten Integrale als Ableitungen mit negativem Index deutet. Dann wird nämlich, wenn man das willkürliche Argument b wegläßt,

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu f^{(-\mu-1)} g^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu f^{(\mu)} g^{(-\mu-1)} = -\sum_{\mu=-1}^{-\infty}(-1)^\mu f^{(-\mu-1)} g^{(\mu)},$$

d. h.

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\mu f^{(-\mu-1)} g^{(\mu)} = 0. \tag{61}$$

Für $f(x) = g(x)$ folgt als *Norm von* $f(x)$ aus (59), wenn x statt b geschrieben wird,

$$\begin{aligned}(f,f) &= \int_a^x f(z)^2\,dz \\ &= f(x)F(x) - f'(x)F_1(x) + f''(x)F_2(x) - + \dots .\end{aligned} \tag{62}$$

16. Beispiel. Es sei $f(x) = x^m$ $\left(m > -\frac{1}{2}\right)$, dann wird

$$f^{(\mu)}(x) = m(m-1)\dots(m-\mu+1)\,x^{m-\mu},$$

$$F_\mu(x) = \frac{x^{m+\mu+1}}{(m+1)(m+2)\dots(m+\mu+1)},$$

falls der Einfachheit wegen $a = 0$ gesetzt ist.

Die Formel (62) liefert alsdann (wegen $2m+1 > 0$) nach Division durch x^{2m+1}

$$\frac{1}{2m+1} = \frac{1}{m+1} - \frac{m}{(m+1)(m+2)} + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)} - + \dots . \tag{63}$$

Wenn m eine ganze Zahl ist, bricht die Reihe mit dem Gliede

$$(-1)^m \frac{m!}{(m+1)(m+2)\dots(2m+1)}$$

ab.

Man kann (63) in der Form schreiben:

$$\frac{m+1}{2m+1} = 1 - \frac{m}{m+2} + \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+3} - \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+3}\cdot\frac{m-2}{m+4} + - \dots \tag{64}$$

und, wenn $m \neq 0$ ist, noch umformen, indem man

$$1 - \frac{m+1}{2m+1} = \frac{m}{2m+1}$$

beachtet[14]):

[14]) Daß die folgende Reihe auch noch für $m = 0$ konvergiert und die Summe 2 hat, ist ganz elementar zu beweisen.

$$\frac{m+2}{2m+1} = 1 - \frac{m-1}{m+3} + \frac{m-1}{m+3}\cdot\frac{m-2}{m+4} - + \cdots \qquad \left(m > -\frac{1}{2}\right),$$

daraus weiter, wenn $p > 0$ und ganz ist,

$$(65) \quad \frac{m+p}{2m+1} = 1 - \frac{m-p+1}{m+p+1} + \frac{m-p+1}{m+p+1}\cdot\frac{m-p}{m+p+2} - + \cdots \quad \left(m > -\frac{1}{2}\right).$$

Setzt man noch $m = n-1$, so wird aus (65)

$$(66) \quad \frac{n+p-1}{2n-1} = 1 - \frac{n-p}{n+p} + \frac{n-p}{n+p}\cdot\frac{n-p-1}{n+p+1} - + \cdots \left(n > \frac{1}{2}, \quad p > 0, \text{ ganz}\right).$$

Übrigens ist die rechte Seite nichts anderes als die hypergeometrische Reihe

$$F(1, p-n, p+n, 1).$$

17. Eine Formel von Guichard. Es seien $\varphi(x)$, $\psi(x)$ analytische Funktionen, und zwar in einem Bereiche, der den Nullpunkt enthält. Dann ist

$$\varphi(x+t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi^{(\mu)}(x)\,\frac{t^\mu}{\mu!},$$

$$\psi(y+t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi^{(\mu)}(y)\,\frac{t^\mu}{\mu!}.$$

Die Formel (46) ergibt jetzt, falls $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ ist,

$$(67) \quad \begin{cases} \int_{z=0}^{x} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi^{(\mu)}(y)\,\varphi^{(-\mu)}(x), \\ \int_{z=0}^{y} \varphi(x+y-z)\,d\psi(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi^{(\mu)}(x)\,\psi^{(-\mu)}(y), \end{cases}$$

wenn man sich der Bezeichnungsweise von **15** bedient. Vertauscht man in der ersten Summe μ mit $-\mu$, addiert sodann und beachtet das doppelte Auftreten des Wertes $\mu = 0$, so erhält man

$$(68) \quad \int_{z=0}^{x} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) + \int_{z=0}^{y} \varphi(x+y-z)\,d\psi(z) - \varphi(x)\,\psi(y) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \varphi^{(\mu)}(x)\,\psi^{(-\mu)}(y).$$

Man kann nun leicht zeigen, daß die linke Seite eine Funktion des Argumentes $x+y$ allein darstellt. Aus der ersten Gleichung (67) folgt nämlich für $y = 0$:

$$(69) \quad \int_{z=0}^{x} \psi(x-z)\,d\varphi(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi^{(\mu)}(0)\,\varphi^{(-\mu)}(x),$$

und wenn man darin $x+y$ statt x schreibt,

$$(70) \qquad \int_{z=0}^{x+y} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi^{(\mu)}(0)\,\varphi^{(-\mu)}(x+y).$$

Nun ist aber

$$\int_{z=0}^{x+y} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) = \int_{z=0}^{x} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) + \int_{z=x}^{x+y} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z)$$

$$- \int_{z=0}^{x} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) + [\psi(x+y-z)\,\varphi(z)]_{z=x}^{x+y} - \int_{z=x}^{x+y} \varphi(z)\,d\psi(x+y-z)$$

$$= \int_{z=0}^{x} \psi(x+y-z)\,d\varphi(z) + \varphi(x+y)\,\psi(0) - \varphi(x)\,\psi(y)$$

$$+ \int_{z=0}^{y} \varphi(x+y-z)\,d\psi(z).$$

Berücksichtigt man nun $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, so erhält man durch Verknüpfung dieses Ergebnisses mit den Formeln (68) und (70)

$$(71) \qquad \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \varphi^{(\mu)}(x)\,\psi^{(-\mu)}(y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi^{(\mu)}(0)\,\varphi^{(-\mu)}(x+y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi^{(\mu)}(0)\,\psi^{(-\mu)}(x+y).$$

Das ist die Formel von Guichard [15]). Man kann sie als eine Art Additionstheorem bezeichnen. Für $x=y$ und für $x=-y$ liefert sie

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \varphi^{(\mu)}(x)\,\psi^{(-\mu)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi^{(\mu)}(0)\,\varphi^{(-\mu)}(2x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi^{(\mu)}(0)\,\psi^{(-\mu)}(2x),$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \varphi^{(\mu)}(x)\,\psi^{(-\mu)}(-x) = 0.$$

18. Anwendung auf die partielle Differentialgleichung

$$(72) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = w.$$

Man sieht sogleich, daß die rechte Seite von (51), also auch die linke, der vorstehenden Differentialgleichung (72) genügt, und zwar bei beliebigem $F(z)$. Das gleiche ist der Fall, wenn man in (51) x mit y vertauscht. Mithin ist auch

$$(73) \qquad w = \int_{u=a}^{x} J((y-b)(x-u))\,dF(u) + \int_{u=b}^{y} J((x-a)(y-u))\,dG(u)$$

[15]) C. Guichard, Généralisation de la série de Taylor. Ann. sc. de l'École Normale Sup. (3) **4** (1887), p. 61–64. Dies ist die einzige Formel, die ich bisher über diesen hier behandelten Gegenstand in der Literatur gefunden habe; sie ist übrigens bei Guichard auf einem ganz anderen Wege bewiesen worden. Man sieht leicht ein, daß die Betrachtungen auch für komplexe Variablen gelten; so bei Guichard.

eine Lösung von (72), und zwar diejenige, die für $y = b$ in $F(x)$ und für $x = a$ in $G(y)$ übergeht, falls nur $G(b) = F(a) = 0$ ist. Diese Lösung ist seit langem bekannt. Nach (51) läßt sie sich auch in der Form von Quadraturreihen

$$w(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left(F_\mu(x)(y-b)^\mu + G_\mu(y)(x-a)^\mu\right) \tag{74}$$

schreiben, worin $F_\mu(x)$ ein μ-tes wiederholtes Integral von $F(x)$ mit der unteren Grenze a, dagegen $G_\mu(y)$ ein ebensolches von $G(y)$ mit der unteren Grenze b bedeutet, und $F(x)$, $G(y)$ integrable Funktionen ihrer Argumente sind, für die $F(a) = G(b) = 0$ ist[16]).

19. Andere Lösung der Differentialgleichung (72). Für manche Zwecke, z. B. für den Zusammenhang mit der Telegraphengleichung, ist es nützlich, eine Lösung der Differentialgleichung (72) mit zwei willkürlichen Funktionen von folgender Form zu betrachten:

$$w(x, y) = \int_{t=a}^{x} J(\omega)\, d\Psi(t) + \int_{t=b}^{y} J(\omega)\, dX(t), \tag{75}$$

wo

$$\omega = (t - x)(t - y).$$

Setzt man z. B.

$$d\Psi(t) = -\, dX(t) = \psi(t)\, dt, \qquad a = b,$$

so wird

$$w = \int_{t=y}^{x} J(\omega)\, \psi(t)\, dt, \tag{76}$$

und diese Lösung hat die Eigenschaft, daß längs der Geraden $x = y$

$$w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\psi(x)$$

---

[16]) Die Tatsache, daß Ausdrücke der Form (74) der partiellen Differentialgleichung (72) genügen, findet sich im wesentlichen schon bei Laplace. Vgl. auch Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, S. 398 u. f.

In (73) und (74) ist übrigens für

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x - a), \quad G(x) = 0$$

wegen

$$\int_{z=a}^{x} \varphi(z)\, d \operatorname{sgn}(z - a) = \varphi(a)$$

— was ja unmittelbar aus der Definition des Stieltjesschen Integrals folgt — auch die Lösung

$$w = J((x-a)(y-b))$$

der Differentialgleichung (72) enthalten.

ist. Im Hinblick auf diese Anwendung ist es wichtig, daß sich auch ein Integral

$$w = \int_{t=a}^{x} J(\omega)\, dF(t) \tag{77}$$

in eine nach Quadraturen der Funktion F fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Zu dem Zweck betrachte man $J(t(t-\xi))$ als erzeugende Funktion der Folge $r_0(\xi), r_1(\xi), r_2(\xi), \ldots$:

$$J(t(t-\xi)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu(\xi)\, \frac{t^\nu}{\nu!}\,. \tag{78}$$

Daraus folgt

$$r_\nu(\xi) = \left[\frac{d^\nu}{dt^\nu} J(t(t-\xi))\right]_{t=0}. \tag{79}$$

Es ist also $r_\nu(\xi)$ jedenfalls eine ganze Funktion von ξ:

$$r_\nu(\xi) = \sum_{\lambda} a_{\nu\lambda}\, \xi^\lambda \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, 2, \ldots); \tag{80}$$

es wird sich nachher herausstellen, daß $r_\nu(\xi)$ ein Polynom ν-ten Grades von ξ ist. Aus (78) und aus der Potenzreihe (50) für $J(x)$ erhält man sofort für $\xi = 0$:

$$\begin{cases} a_{\nu 0} = 0 \quad , & \text{falls } \nu \text{ ungerade ist,} \\ a_{\nu 0} = \dfrac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}\,, & \text{falls } \nu = 2\mu \text{ gerade ist.} \end{cases} \tag{81}$$

Die Formel (46) liefert, auf die erzeugende Funktion $p(\xi, t) = J(t(t-\xi))$ nach (78) angewendet (wenn man darin t statt z und ξ statt y schreibt),

$$\int_{t=a}^{x} J((t-x)(t-x+\xi))\, dF(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu(\xi)\, F_\mu(x). \tag{82}$$

Setzt man schließlich $\xi = x - y$ und wieder $\omega = (t-x)(t-y)$, so erhält man nach (77)

$$w = \int_{t=a}^{x} J(\omega)\, dF(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu(x-y)\, F_\mu(x). \tag{83}$$

Das ist die gewünschte Reihenentwicklung. Damit w der Differentialgleichung (72) genüge, muß notwendig $F(x)$ differenzierbar sein.

20. Eigenschaften der Funktionen $r_\nu(\xi)$. Für $t=1$ folgt aus (78)

$$J(1-\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r_\nu(\xi)}{\nu!}\,; \tag{84}$$

diese Reihe konvergiert für jeden Wert von ξ, also ist

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{r_\nu(\xi)}{\nu!} = 0. \tag{85}$$

Ferner kann man leicht beweisen, daß die Reihe (82),

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu(\xi)\, F_\mu(x),$$

bei festem x für jeden Wert von ξ und bei festem ξ für $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergiert. Aus (5) ergibt sich nämlich

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu(\xi)\, F_\mu(x) \leqq M \sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu(\xi)\, \frac{(b-a)^\mu}{\mu!} = MJ((b-a)(b-a-\xi)).$$

Aus (78) folgt durch Differentiation nach ξ und nach t, falls man noch $t(t-\xi) = v$ setzt,

$$-tJ'(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r'_\nu(\xi)\, \frac{t^\nu}{\nu!}, \tag{86}$$

$$t^2 J''(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r''_\nu(\xi)\, \frac{t^\nu}{\nu!}, \tag{87}$$

$$(2t-\xi)J'(v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_\nu(\xi)\, \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \tag{88}$$

$$-t(2t-\xi)J''(v) - J'(v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r'_\nu(\xi)\, \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}. \tag{89}$$

Durch Elimination von $J'(v)$ aus (86) und (88) findet man

$$\xi r'_\nu(\xi) = \nu(2r'_{\nu-1}(\xi) + r_\nu(\xi)), \tag{90}$$

und mit Benutzung von (78), (87) und (89)

$$\sum_{\nu} (r_\nu(\xi) + r''_\nu(\xi) + r'_{\nu+1}(\xi))\, \frac{t^\nu}{\nu!}$$

$$= J(v) + t^2 J''(v) - t(2t-\xi)J''(v) - J'(v) = -(vJ''(v) + J'(v) - J);$$

die rechte Seite verschwindet aber wegen (49). Man hat also

$$r_\nu(\xi) + r''_\nu(\xi) + r'_{\nu+1}(\xi) = 0. \tag{91}$$

Ersetzt man nun in (90) ν durch $\nu+1$ und eliminiert dann aus (90) und (91) $r'_{\nu+1}(\xi)$, so erhält man die lineare Differentialgleichung für $r_\nu(\xi)$:

$$\xi r'''_\nu + (\nu+2) r''_\nu + \xi r'_\nu - \nu r_\nu = 0. \tag{92}$$

21. Bestimmung der Funktionen $r_\nu(\xi)$. Zunächst ergibt sich aus (86) nach Einsetzen von

$$r'_\nu(\xi) = \sum_{\lambda} \lambda a_{\nu\lambda} \xi^{\lambda-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

für $\xi = 0$ mit Benutzung der Potenzreihe für $J'(x)$ sogleich

$$(93)\qquad \begin{cases} a_{\nu 1} = 0 & , \text{ wenn } \nu \text{ gerade ist,} \\ a_{\nu 1} = -\dfrac{(2\mu+1)!}{\mu!\,(\mu+1)!}, & \text{wenn } \nu = 2\mu+1 \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Nunmehr kann man die Differentialgleichung (92) verwenden, um die Koeffizienten $a_{\nu\lambda}$ zu berechnen. Man erhält nämlich durch Einsetzen von (80) zuerst die Rekursionsformel

$$(94)\qquad (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+\nu+2)\,a_{\nu,\lambda+2} = (\nu-\lambda)\,a_{\nu\lambda}.$$

Weil nun $a_{\nu 0} = 0$ ist, also auch $a_{\nu 2}$, $a_{\nu 4}$, ... wenn ν ungerade, und $a_{\nu 1} = 0$, also auch $a_{\nu 3}$, $a_{\nu 5}$, ... wenn ν gerade ist, so ist $r_\nu(\xi)$ eine gerade oder ungerade Funktion von ξ, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, d. h. $r_\nu(-\xi) = (-1)^\nu r_\nu(\xi)$. Weil ferner die rechte Seite von (94) für $\lambda = \nu$ verschwindet, so sind sämtliche Größen $a_{\nu\lambda}$ für $\lambda > \nu$ gleich Null, mithin ist, wie in **19** behauptet, $r_\nu(\xi)$ tatsächlich eine ganze *rationale* Funktion νten Grades von ξ.

Aus (94) folgt leicht für $\lambda \leqq \nu$

$$(95)\qquad \begin{cases} a_{\nu\lambda} = \dfrac{\nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-\lambda+2)}{\lambda!\,(\nu+2)(\nu+4)\ldots(\nu+\lambda)}\,a_{\nu 0} & (\lambda \text{ und } \nu \text{ gerade}), \\ a_{\nu\lambda} = \dfrac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu-5)\ldots(\nu-\lambda+2)}{\lambda!\,(\nu+3)(\nu+5)\ldots(\nu+\lambda)}\,a_{\nu 1} & (\lambda \text{ und } \nu \text{ ungerade}), \end{cases}$$

sonst

$$a_{\nu\lambda} = 0.$$

Im besonderen ergibt sich für $\lambda = \nu$:

$$(96)\qquad \begin{cases} a_{\nu\nu} = \dfrac{\nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots 4\cdot 2}{\nu!\,(\nu+2)(\nu+4)\ldots(2\nu)}\,a_{\nu 0} \\ \qquad = \dfrac{\nu(\nu-2)\ldots 4\cdot 2}{(\nu+2)(\nu+4)\ldots(2\nu)\cdot(\mu!)^2} = \dfrac{1}{\nu!} \quad (\nu = 2\mu \text{ gerade}), \\ a_{\nu\nu} = \dfrac{(\nu-1)(\nu-3)\ldots 4\cdot 2}{\nu!\cdot(\nu+3)(\nu+5)\ldots(2\nu)}\,a_{\nu 1} \\ \qquad = -\dfrac{(\nu-1)(\nu-3)\ldots 4\cdot 2}{(\nu+3)(\nu+5)\ldots(2\nu)\cdot\mu!\,(\mu+1)!} = -\dfrac{1}{\nu!} \quad (\nu = 2\mu+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

also

$$(97)\qquad a_{\nu\nu} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}.$$

Setzt man in der ersten Formel (95) $\nu = 2\mu$, $\lambda = 2\varrho$ und benutzt die zweite Formel (81), so erhält man, nach Division des Zählers und Nenners durch 2^ϱ,

$$a_{2\mu,2\varrho} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\varrho+1)(2\mu)!}{\lambda!\,(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+\varrho)\cdot(\mu!)^2}$$
$$= \frac{(2\mu)!}{\lambda!\,(\mu+\varrho)!\,(\mu-\varrho)!} = \frac{\nu!}{\lambda!\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)!\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)!},$$

und in ähnlicher Weise aus der zweiten Formel (95) in Verbindung mit der zweiten Formel (93) für $a_{2\mu+1,2\varrho+1}$ den entgegengesetzten Wert. Also hat man zusammenfassend

$$a_{\nu\lambda} = \frac{(-1)^\nu \nu!}{\lambda!\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)!\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)!}, \tag{98}$$

falls $\lambda \leqq \nu$, λ, ν beide gerade oder beide ungerade. Damit wird

$$r_\nu(\xi) = (-1)^\nu \nu! \sum_{\lambda=0}^{\nu}{}^{*} \frac{1}{\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)!\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)!} \cdot \frac{\xi^\lambda}{\lambda!}, \tag{99}$$

wobei der * an $\sum$ daran erinnern soll, daß λ nur gerade oder nur ungerade Werte durchlaufen darf, je nachdem ob ν gerade oder ungerade ist.

Für die praktische Berechnung der $r_\nu(\xi)$ ist übrigens eine Rekursionsformel besser geeignet, die sich aus (91) leicht ergibt:

$$r_{\nu+1}(\xi) = -r_\nu'(\xi) - \int_0^\xi r_\nu(\xi)\,d\xi + C_\nu. \tag{100}$$

Die Integrationskonstante erhält man für $\xi = 0$ nach (81) und (75) zu

$$C_\nu = a_{\nu+1,0} + a_{\nu 1} = 0, \qquad \text{wenn } \nu \text{ gerade ist,}$$
$$= \frac{(2\mu+1)!}{\mu!\,(\mu+1)!}, \qquad \text{wenn } \nu = 2\mu+1 \text{ ungerade ist.} \tag{101}$$

Für die ersten $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ findet man hiernach

$$\begin{cases} r_0(\xi) = 1 \\ -r_1(\xi) = \xi \\ r_2(\xi) = 2 + \frac{1}{2}\xi^2 \\ -r_3(\xi) = 3\xi + \frac{1}{6}\xi^3 \\ r_4(\xi) = 6 + 2\xi^2 + \frac{1}{24}\xi^4 \\ -r_5(\xi) = 10\xi + \frac{5}{6}\xi^3 + \frac{1}{120}\xi^5 \\ r_6(\xi) = 20 + \frac{15}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{720}\xi^6. \end{cases} \tag{102}$$

$r_{2\mu}(\xi)$ $(\mu > 0)$ hat ein einziges Minimum bei $\xi = 0$, $r_{2\mu+1}(\xi)$ dort einen Wendepunkt.

22. Lösung der partiellen Differentialgleichung (72) mit anderen Grenzbedingungen. Für die Integration der Telegraphengleichung braucht man auch eine Lösung w, die den folgenden Grenzbedingungen genügt: längs der Geraden $x = y$ soll sein

$$w = 2\chi(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Dies leistet die Formel

$$w = \chi(x) + \chi(y) + \int_{t=y}^{x} J'(\omega)(y - x)\,\chi(t)\,dt, \tag{103}$$

worin wieder $\omega = (t - x)(t - y)$ gesetzt worden ist; man erhält sie z. B. nach dem Riemannschen Integrationsverfahren.

Auch ein Integral der Form

$$\bar{w} = \int_{t=a}^{x} J'(\omega)(x - y)\,dF(t), \tag{104}$$

auf das ja das in (103) auftretende durch Zerlegung zurückgeführt werden kann, läßt sich in eine nach Quadraturen von $F(x)$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Setzt man nämlich wieder $\xi = x - y$ und differenziert unter der Annahme, daß $F(x)$ die Ableitung $f(x)$ habe, die Formel (83) oder

$$w = \int_{t=a}^{x} J(\omega) f(t)\,dt = \sum_{\mu=0}^{\infty} r_\mu(\xi)\,F_\mu(x) \tag{105}$$

partiell beiderseits nach x, so ergibt sich

$$J(0)f(x) + \int_{t=a}^{x} J'(\omega)(y - t)\,dF(t) = r_0(\xi)f(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty} r_\mu(\xi)\,F_{\mu-1}(x) + \sum_{\mu=0}^{\infty} r'_\mu(\xi)\,F_\mu(x),$$

worin wegen $J(0) = 1$, $r_0(\xi) = 1$ sich die ersten Glieder auf beiden Seiten wegheben, und die zweite Summe auch von $\mu = 1$ an erstreckt werden kann. Man erhält also

$$\int_{t=a}^{x} J'(\omega)\,(y - t)\,dF(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (r_{\mu+1}(\xi) + r'_\mu(\xi))\,F_\mu(x).$$

Durch Differentiation nach y ergibt sich aus (105)

$$\int_{t=a}^{x} J'(\omega)(x - t)\,dF(t) = -\sum_{\mu=0}^{\infty} r'_\mu(\xi)\,F_\mu(x),$$

mithin weiter durch Subtraktion

$$(106)\qquad w = \int_{t=a}^{x} J'(\omega)\,\xi\,dF(t) = -\sum_{\mu=0}^{\infty}(2r'_\mu(\xi) + r_{\mu+1}(\xi))\,F_\mu(x)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} s_\mu(\xi)\,F_\mu(\xi).$$

Dies ist schon die verlangte Entwicklung. Die Entwicklungskoeffizienten

$$(107)\qquad s_\mu(\xi) = -2r'_\mu(\xi) - r_{\mu+1}(\xi)$$

haben ähnliche Eigenschaften wie die $r_\mu(\xi)$ selbst und lassen sich aus diesen leicht berechnen. Man findet aus (90) sofort

$$(108)\qquad s_\mu(\xi) = -\frac{\xi}{\mu+1}\,r'_{\mu+1}(\xi),$$

daher aus (99)

$$(109)\qquad s_\mu(\xi) = (-1)^\mu\,\mu!\sum_{\lambda=0}^{\mu}{}^{*}\frac{1}{\left(\frac{\mu+\lambda}{2}+1\right)!\left(\frac{\mu-\lambda}{2}\right)!}\cdot\frac{\xi^{\lambda+1}}{\lambda!},$$

wobei wieder der $*$ an $\sum$ bedeuten soll, daß λ nur gerade oder nur ungerade Werte annehmen darf, je nachdem ob μ gerade oder ungerade ist. Die ersten dieser Funktionen sind

$$(110)\qquad \begin{cases} s_0(\xi) = \xi \\ -s_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 \\ s_2(\xi) = \xi + \frac{1}{6}\xi^3 \\ -s_3(\xi) = \xi^2 + \frac{1}{24}\xi^4 \\ s_4(\xi) = 2\xi + \frac{1}{2}\xi^3 + \frac{1}{120}\xi^5 \\ -s_5(\xi) = \frac{5}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^4 + \frac{1}{720}\xi^6 \\ s_6(\xi) = 5\xi + \frac{3}{2}\xi^3 + \frac{1}{24}\xi^5 + \frac{1}{5040}\xi^7. \end{cases}$$

Ferner folgt durch Differenzieren aus (107) im Hinblick auf (91)

$$(111)\qquad s'_\mu(\xi) = r_\mu(\xi) - r''_\mu(\xi).$$

Aus (107), (108) und (111) findet man

$$(112)\qquad \begin{cases} 2r_\mu(\xi) = \frac{\mu+1}{\xi}\,s_\mu(\xi) + s'_\mu(\xi) \\ 2r''_\mu(\xi) = \frac{\mu+1}{\xi}\,s_\mu(\xi) - s'_\mu(\xi), \end{cases}$$

und daraus durch Elimination von $r(\xi)$ die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(113)\quad s_\mu'''(\xi)+\frac{\mu+1}{\xi}s_\mu''(\xi)+\frac{\xi^2-2(\mu+1)}{\xi^2}s_\mu'(\xi)+\frac{(\mu+1)(2-\xi^2)}{\xi^3}s_\mu(\xi)=0.$$

23. Schlußbemerkung. Es scheint mir, daß die im vorhergehenden betrachteten Entwicklungen in Reihen, die nach wiederholten Quadraturen

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots$$

fortschreiten, insofern für die praktische Mathematik von Bedeutung sind, als man diese Quadraturen auf zeichnerischem Wege oder mit dem Integraphen mühelos erhalten kann. Selbstverständlich sind die Quadraturreihen nur dann praktisch brauchbar, wenn sie hinreichend schnell konvergieren. Darüber werden sich aber allgemeine Regeln kaum angeben lassen.

Berlin, Oktober 1927.

(Eingegangen am 17. November 1927.)

Kurze Bemerkung über wiederholte Quadraturen.

Von

Eberhard Hopf in Berlin-Lichterfelde.

In der vorhergehenden Abhandlung hat Herr R. Rothe[1]) den folgenden Satz bewiesen:

Die Funktionen

$$U_0(x) = f(x), \quad U_1(x) = \int_{-\infty}^{x} U_0(x)\,dx, \ldots, \quad U_n(x) = \int_{-\infty}^{x} U_{n-1}(x)\,dx, \ldots$$

mögen für alle $n = 0, 1, \ldots$ *existieren; existiert* $\lim_{n\to\infty} U_n(x) = G(x)$, *und zwar gleichmäßig in jedem endlichen* x*-Intervalle, so ist notwendig* $G(x) = \text{konst.}\, e^x$.

Wir zeigen allgemeiner: Existiert $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ in einem einzigen Punkte $x = x_0$, so existiert er überall, und die Grenzfunktion ist notwendig gleich konst. e^x.

Beweis. Wir bilden die Reihe der Funktionen

$$F_0(x) = f(x), \quad F_1(x) = \int_{x_0}^{x} F_0(x)\,dx, \ldots, \quad F_n(x) = \int_{x_0}^{x} F_{n-1}(x)\,dx, \ldots.$$

Herr Rothe bewies die Formel

$$U_n(x) = U_n(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}U_{n-1}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}U_{n-2}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}U_1(x_0) + F_n(x),$$

die sich leicht durch Schluß von n auf $n+1$ ergibt. Ist $\lim_{n=\infty} U_n(x_0) = c$, so setzen wir $U_n(x_0) - c = d_n$ und $s_n(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}$.

[1]) Math. Zeitschrift **29**, S. 346–372.

Dann ist

$$U_n(x) - c\,s_n(x - x_0) - F_n(x)$$
$$= d_n + \frac{x - x_0}{1!}\,d_{n-1} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\,d_{n-2} + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,d_1.$$

Die rechten Seiten stellen hier eine lineare Transformation der Nullfolge $d_1, d_2, \ldots$ dar. Wegen $1 + \frac{|x - x_0|}{1!} + \frac{|x - x_0|^2}{2!} + \ldots + \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} < e^{|x - x_0|}$ folgt aus einem bekannten Toeplitzschen Satze [2]), daß auch die linken Seiten eine Nullfolge darstellen, d. h. wegen $\lim_{n=\infty} F_n(x) = 0$, daß $\lim_{n=\infty} U_n(x) = c \lim_{n=\infty} s_n(x - x_0) = c \cdot e^{x - x_0}$ ist.

[2]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 377. Berlin 1922.

(Eingegangen am 17. November 1927.)

Über die Grenzfunktion wiederholter uneigentlicher Integrale.

Von

Rudolf Rothe in Berlin.

In der vorangehenden Note hat Herr Eberhard Hopf in Erweiterung des Satzes von Nr. 4 meiner Abhandlung über wiederholte Quadraturen[1]) bewiesen, daß, wenn die Folge der wiederholten uneigentlichen Integrale

$$U_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} U_{\mu-1}(x)\,dx \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

($U_0(x)$ beschränkt und integrabel im Bereiche $-\infty \ldots b$) auch nur für einen einzigen bestimmten Wert $x = x_0$ zu einem Grenzwert für $\mu \to \infty$ konvergiert, dann ein solcher für jeden Wert von x vorhanden und die Grenzfunktion also notwendig gleich const. e^x sein muß. Während hier die Existenz der Grenzfunktion aus dem Verhalten der $U_\mu(x)$ an einer im Endlichen gelegenen Stelle gefolgert wird, will ich zeigen, daß man sie lediglich aus dem Verschwinden der $U_\mu(x)$ für $x \to -\infty$ erschließen kann. Wenn nämlich sämtliche $U_\mu(x)$ überhaupt vorhanden sein sollen, so müssen sie für $x \to -\infty$ von höherer Ordnung als jede Potenz x^{-n} verschwinden, wie groß auch $n\,(>0)$ sein mag: $U_\mu(x) = o(x^{-n})$.

Es gibt also gewiß Funktionen $\varphi(x)$, die übrigens stets >0 angenommen werden können, so daß gleichmäßig

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{U_\mu(x)}{\varphi(x)} = C \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, unter C eine von μ unabhängige Konstante verstanden, die auch gleich Null sein kann; genauer:

$$(1) \qquad C - \varepsilon < \frac{U_\mu(\xi)}{\varphi(\xi)} < C + \varepsilon$$

[1]) Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 346–372.

für alle $\xi < 0$, aber $|\xi| > \Xi(\varepsilon)$, bei willkürlichem $\varepsilon > 0$, wobei $\Xi(\varepsilon)$ von μ unabhängig ist.

Dann gilt folgender

Satz. *Damit $U_\mu(x)$ für $\mu \to \infty$ gleichmäßig einer Grenzfunktion zustrebe, ist hinreichend und, falls $C \neq 0$, auch notwendig:*

(a) $$\varphi(x) = O(e^x) \quad \text{für} \quad x \to -\infty;$$

die Grenzfunktion ist notwendig gleich $c\,e^x$.

Beweis. Zum Beweise werde die Formel (13) meiner Abhandlung oder

$$U_\mu(x) = U_\mu(\xi) + U_{\mu-1}(\xi)\frac{x-\xi}{1!} + U_{\mu-2}(\xi)\frac{(x-\xi)^2}{2!} + \ldots + U_0(\xi)\frac{(x-\xi)^\mu}{\mu!} + F_\mu(\xi, x)$$

benutzt, worin

$$F_\mu(\xi, x) = \int_\xi^x F_{\mu-1}(\xi, z)\,dz \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

$$F_0(\xi, x) = U_0(x) - U_0(\xi)$$

gesetzt ist und bei beliebigem $\delta > 0$

(2) $$|F_\mu(\xi, x)| < \delta \quad \text{für alle} \quad \mu > \mathsf{M}(\delta)$$

gilt. Hieraus folgt in Verbindung mit (1), wenn $x > \xi$,

$$(C-\varepsilon)\varphi(\xi)\left(1 + \frac{x-\xi}{1!} + \frac{(x-\xi)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-\xi)^\mu}{\mu!}\right) - |F_\mu(\xi, x)|$$

$$< U_\mu(x) < (C+\varepsilon)\varphi(\xi)\left(1 + \frac{x-\xi}{1!} + \frac{(x-\xi)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-\xi)^\mu}{\mu!}\right) + |F_\mu(\xi, x)|.$$

Nun läßt sich $\mathsf{M}(\delta)$ so angeben, daß zugleich mit (2) auch

$$e^{x-\xi} - \left(1 + \frac{x-\xi}{1!} + \frac{(x-\xi)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-\xi)^\mu}{\mu!}\right) < \delta \quad \text{für alle} \quad \mu > \mathsf{M}(\delta)$$

erfüllt ist. Man hat daher

(3) $$(C-\varepsilon)\varphi(\xi)(e^{x-\xi} - \delta) - \delta < U_\mu(x) < (C+\varepsilon)\varphi(\xi)(e^{x-\xi} + \delta) + \delta$$

oder, indem man links $-\varphi(\xi)\varepsilon\delta$ statt $\varphi(\xi)\varepsilon\delta$ schreibt, wodurch die linke Seite verkleinert wird, und zur Abkürzung

$$\delta(\varphi(\xi)(C+\varepsilon)+1) = \delta_1,$$

$$\varphi(\xi)\,e^{-\xi} = \psi(\xi)$$

setzt:

$$-\varepsilon\psi(\xi)\,e^x - \delta_1 < U_\mu(x) - Ce^x\psi(\xi) < \varepsilon\psi(\xi)\,e^x + \delta_1.$$

Hierin kann $|\delta_1|$ durch passende Wahl von δ beliebig klein gemacht werden, und zwar für jeden Wert von ε und ξ. Mit $\varepsilon\psi(\xi)e^x$ ist das aber dann

der Fall, wenn für alle $\xi < 0$, $|\xi| > \Xi(\varepsilon)$ die Funktion $\psi(\xi)$ beschränkt bleibt.

a) *Unter der Voraussetzung* (a) oder

$$\psi(x) \leqq A \quad \text{für alle} \quad x < 0, \quad |x| > X, \tag{4}$$

wobei A eine feste Konstante einschließlich Null und X eine beliebige positive Konstante bedeuten, trifft das für $|\xi| > X$ zu. Wählt man also $X > \Xi(\varepsilon)$, so gilt

$$|U_\mu(x) - Ce^x \psi(\xi)| < \varepsilon A + \delta_1 = \varepsilon_1$$

für alle $\mu > \mathsf{M}(\delta)$ und *alle* $\xi < 0$, $|\xi| > \Xi(\varepsilon)$. Ist $\xi_1 < 0$, $|\xi_1| > \Xi(\varepsilon)$, aber $\xi_1 \neq \xi$, so hat man auch

$$|U_\mu(x) - Ce^x \psi(\xi_1)| < \varepsilon_1,$$

mithin

$$Ce^x |\psi(\xi) - \psi(\xi_1)| < 2\varepsilon_1,$$

woraus folgt, daß $\psi(\xi)$ einen von ξ unabhängigen Wert $B \leqq A$ besitzen muß. Also ist mit $BC = c$

$$|U_\mu(x) - ce^x| < \varepsilon_1.$$

Die Voraussetzung (a) reicht also für die Gültigkeit des Satzes hin.

b) Wenn nun *umgekehrt* $\lim\limits_{\mu \to \infty} U_\mu(x) = G(x)$ bei gleichmäßiger Konvergenz vorhanden ist, wozu nach Herrn Hopf die Konvergenz an einem Punkte ausreicht, so kann man für $\mu > \mathsf{M}(\delta)$

$$U_\mu(x) = G(x) + \vartheta_\mu \delta$$

setzen, wo $\delta > 0$ beliebig und $-1 < \vartheta_\mu(x, \delta) < +1$ ist. Aus (3) folgt jetzt nach Division durch $\psi(\xi)\,(> 0)$

$$(C - \varepsilon)(e^x - \delta e^\xi) - \frac{\delta}{\psi(\xi)} < \frac{G(\xi)}{\psi(\xi)} + \frac{\vartheta_\mu \delta}{\psi(\xi)} < (C + \varepsilon)(e^x + \delta e^\xi) + \frac{\delta}{\psi(\xi)}.$$

Wäre nun $\psi(\xi)$ für hinreichend große Werte von $|\xi|$ $(\xi < 0)$ *nicht* beschränkt, so könnte man X so groß wählen, daß für $|\xi| > X > \Xi(\varepsilon)$ der mittlere Ausdruck in dieser Formel beliebig klein wird, während rechte und linke Seite sich von Ce^x beliebig wenig unterscheiden. Hierin besteht ein Widerspruch; es müßte denn $C = 0$ sein. $\psi(\xi)$ ist also beschränkt, d. h. die Bedingung (a) ist zur Gültigkeit des Satzes auch notwendig.

Berlin, November 1927.

(Eingegangen am 17. November 1927.)

Über konvexe Punktmengen konstanter Breite.

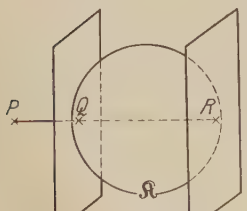
Von

Börge Jessen in Kopenhagen.

Eine konvexe Punktmenge im n-dimensionalen Euklidischen Raum ist von *konstanter Breite*, wenn je zwei parallele Stützebenen (Ebene = linearer Unterraum von $n-1$ Dimensionen) denselben Abstand haben. Dieser Abstand ist dem Durchmesser d der Menge, d. h., indem wir die Punktmenge als abgeschlossen voraussetzen, dem größten Abstand zwischen zwei Punkten der Menge, gleich.

E. Meißner hat eine sehr einfache Bedingung dafür angegeben, daß eine konvexe Punktmenge von konstanter Breite sein soll. nämlich diejenige, daß die Menge *vollständig* sei; darunter versteht man, daß es unmöglich sein soll, der Punktmenge einen Punkt hinzuzufügen, ohne dabei den Durchmesser zu vergrößern[1]). Herr Meißner beweist aber den Satz nur für $n=2$ und $n=3$, und nur im ersten Fall sind alle Details des Beweises ausgeführt. Es soll nun hier ein Beweis gegeben werden, welcher für alle n gilt. Der Anschaulichkeit halber betrachten wir vorläufig nur den Fall $n=3$.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper der konstanten Breite d, zu dem wir einen Punkt P außerhalb $\mathfrak{K}$ hinzufügen. Es sei Q der (eindeutig bestimmte) Punkt von $\mathfrak{K}$, der P am nächsten liegt. Die durch Q gehende, auf PQ senkrechte Ebene ist eine Stützebene von $\mathfrak{K}$; die hierzu parallele Stützebene berühre $\mathfrak{K}$ in R. P, Q und R liegen auf einer Geraden, und man hat $PR > QR = d$, d. h. die Hinzufügung von P hat den Diameter der Menge vergrößert.



[1]) E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1911.

Wir haben somit den ersten Teil des Meißnerschen Satzes:

Eine konvexe Punktmenge konstanter Breite ist vollständig.

Es soll nun gezeigt werden (und dies ist der eigentliche Satz), daß auch die Umkehrung richtig ist:

Eine vollständige konvexe Punktmenge ist von konstanter Breite.

Wir führen den Beweis in drei Schritten.

Erster Schritt. Es seien A und B zwei Punkte, deren Abstand $\leqq d$ ist. Es soll *der Durchschnitt $\mathfrak{D}(A, B)$ aller vollständigen Körper vom Diameter d, welche A und B enthalten*, bestimmt werden. (Der Durchschnitt aller *konvexen*, A und B enthaltenden Mengen ist die Strecke AB, und der Durchschnitt aller vollständigen Mengen mit *frei wählbarem Diameter* ist ebenfalls diese Strecke.) In einer Ebene durch A und B zeichne man einen Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ mit dem Radius d, der kleiner als ein Halbkreis ist. Diesen Bogen drehe man um AB; es entsteht ein spindelförmiger Körper, den wir mit $\mathfrak{S}(A, B)$ bezeichnen wollen. *Der Durchschnitt aller A und B enthaltenden vollständigen Körper vom Durchmesser d ist $\mathfrak{S}(A, B)$.*

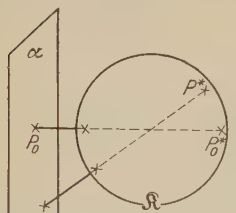
Beweis. Der Durchschnitt der zwei Kugeln mit den Zentren A und B und dem Radius d ist eine Linse $\mathfrak{L}(A, B)$, welche jede vollständige Menge durch A und B mit dem Durchmesser d enthält. Es sei P ein Punkt von $\mathfrak{L}(A, B)$. Nach einem bekannten Satz[2]) gibt es einen vollständigen Körper mit dem Durchmesser d, der A, B und P enthält. $\mathfrak{L}(A, B)$ ist also die Vereinigungsmenge aller A und B enthaltenden vollständigen Körper vom Durchmesser d. Nun ist ein vollständiger Körper $\mathfrak{K}$ vom Durchmesser d der Durchschnitt aller Kugeln mit dem Radius d, deren Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ angehört. Der gesuchte Durchschnitt $\mathfrak{D}(A, B)$ ist also der Durchschnitt aller Kugeln mit dem Radius d, deren Mittelpunkt der Linse $\mathfrak{L}(A, B)$ angehört; dieser Durchschnitt ist aber - wie sofort zu sehen — die genannte Spindel $\mathfrak{S}(A, B)$.[3])

[2]) Jede Punktmenge vom Durchmesser $\leqq d$ ist Teilmenge einer vollständigen Menge mit dem Durchmesser d. J. Pál, Über ein elementares Variationsproblem. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Meddelelser III, 2 (1920). H. Lebesgue, Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes. Journal de Mathématiques, 8e série, tome IV (1921).

[3]) Der hier angewendete Prozeß ist ganz allgemein der folgende: Es sei α irgendeine Menge. Um jeden Punkt der Menge wird eine Kugel vom Radius d beschrieben. Den Durchschnitt aller dieser Kugeln bezeichnen wir mit $\Delta(\alpha)$. Ist der Durchmesser von α höchstens d, so bedeutet $\Delta(\alpha)$ die Vereinigungsmenge aller vollständigen, α enthaltenden Mengen vom Durchmesser d, und $\Delta(\Delta(\alpha))$ bedeutet den Durchschnitt aller dieser vollständigen Mengen.

Zweiter Schritt. Es sei $\mathfrak{K}$ ein vollständiger Körper vom Durchmesser d, P ein Punkt außerhalb $\mathfrak{K}$. Der maximale Abstand d_P zwischen P und einem Punkt von $\mathfrak{K}$ ist größer als d. Wir werden zeigen, daß es nur einen Punkt P^* von $\mathfrak{K}$ gibt, dessen Entfernung von P gleich d_P ist, daß also *jedem Punkt, der nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist, ein eindeutig bestimmter fernster Punkt von $\mathfrak{K}$ entspricht.* Dies ist eine unmittelbare Folge des soeben bewiesenen Satzes. Es seien nämlich A und B zwei Punkte von $\mathfrak{K}$ mit $PA = PB > d$. Schneidet man die Spindel $\mathfrak{S}(A, B)$ mit der Geraden, die den Winkel $\sphericalangle APB$ halbiert, so erhält man auf ihrer Oberfläche einen Punkt Q, für welchen $PQ > PA$ ist. Es können also nicht zwei Punkte A und B als Punkte P^* vom maximalen Abstand zu P gehören.

Dritter Schritt. Nach diesen Vorbereitungen ist es nun ein leichtes zu zeigen, daß jede vollständige Menge $\mathfrak{K}$ vom Diameter d die konstante Breite d hat. Es sei nämlich α eine Ebene außerhalb $\mathfrak{K}$, P ein Punkt in α und P^* der laut dem Vorhergehenden eindeutig bestimmte Punkt von $\mathfrak{K}$, der von P maximalen Abstand hat. Aus der Eindeutigkeit von P^* folgt, daß P^* mit P stetig variiert. Es sei P_0 derjenige Punkt von α, für welchen der Abstand PP^* minimal wird. $P_0P_0^*$ steht — wie eine einfache elementargeometrische Überlegung zeigt — senkrecht auf α. Die zu α parallele Ebene β durch P_0^* ist eine Stützebene von $\mathfrak{K}$; ihr Abstand von α ist größer als d. Man verschiebe α parallel, bis sie eine Stützebene γ wird; die Entfernung von β und γ ist demnach $\geqq d$; anderseits ist sie $\leqq d$. Damit ist der Satz bewiesen.



Wir haben bisher Punktmengen im dreidimensionalen Euklidischen Raum betrachtet. Der mitgeteilte Beweis gilt aber Wort für Wort im n-dimensionalen Raum, so daß man allgemein den Satz hat:

Eine abgeschlossene konvexe Punktmenge des n-dimensionalen Raumes ist dann und nur dann von konstanter Breite, wenn sie vollständig ist.

(Eingegangen am 26. Februar 1928.)

Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik.

Von

Reinhold Baer in Freiburg i. Br.

Herrn Professor Dr. Felix Hausdorff zum 60. Geburtstag ergebenst gewidmet.

Inhalt.

Seite

Einleitung 381
§ 1. Der Ordnungstypus der Menge der Kardinalzahlen (Axiome I—III) 385
§ 2. Die Addition der Kardinalzahlen (Axiome IV—VII) 387
§ 3. Die Multiplikation der Kardinalzahlen (Axiome VIII bis XI) 388
§ 4. Kategorizität und Vollständigkeit (Axiom XII) . . 392
§ 5. Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit 394

Einleitung.

In der Mengenlehre führt man u. a. die Kardinalzahlen als *die* Invariante von Mengen gegenüber eineindeutigen Abbildungen ein, d. h. also durch die Festsetzung, wann zwei Mengen die gleiche Kardinalzahl zukommt, bzw. wann zwei Kardinalzahlen gleich sind. Durch Zurückführung auf die entsprechenden Beziehungen zwischen Mengen werden dann zwischen den Kardinalzahlen die Relationen der Ordnung, Addition, Multiplikation festgelegt. Der Inbegriff der aus diesen Relationen aufzubauenden Sätze ist dann die *Arithmetik der Kardinalzahlen.*

Will man nur diese arithmetischen Eigenschaften der Kardinalzahlen studieren, so wird man nicht mehr die oben skizzierte mengentheoretische Definition der Kardinalzahlen zugrunde legen, man wird vielmehr (ganz im Sinne der sogenannten Relativaxiomatik, die die Mengenlehre bereits in weitem Umfange voraussetzt) ein System von Elementen betrachten, das den uns von den Kardinalzahlen her bekannten arithmetischen Gesetzen

genügt. Wir axiomatisieren also Ordnung, Addition und Multiplikation der Elemente unseres Systems, während die Gleichheit durchaus im Sinne der mengentheoretischen Gleichheit von Elementen, nicht aber in dem der mengentheoretischen Äquivalenz zu verstehen ist.

Mehr noch: wir müssen von unserm System der Kardinalzahlen voraussetzen, daß es eine *Menge* ist. Die Notwendigkeit dieser Annahme sieht man ein, wenn man bedenkt, daß eine Hauptfrage bei jeder [Relativ-] Axiomatik die nach der Kategorizität des Axiomensystems ist; d. h. ob unsere Axiome bereits die axiomatisierten Relationen bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmen; Isomorphismen sind aber nur zwischen Mengen einer und derselben „Mengenlehre“ möglich.

Unsere Voraussetzung ist aber auch möglich; denn eine widerspruchslose Mengenlehre ist stets der Erweiterung fähig, sogar derart, daß die Gesamtheit der Mengen der Ausgangsmengenlehre in der erweiterten eine Menge ist[1]); in einer so geeignet erweiterten Mengenlehre kann man dann auch die Menge aller Kardinalzahlen der engeren Mengenlehre bilden.

Die von uns tatsächlich benutzten mengentheoretischen Voraussetzungen, die nur wohlgeordnete Mengen betreffen, stellen wir am Schluß dieser Einleitung zusammen.

An Axiomen haben wir außer einigen bekannten, in der allgemeinen Mengenlehre bewiesenen Sätzen aus der Kardinalzahlarithmetik[2]) wesentlich die beiden folgenden:

I. die verallgemeinerte Cantorsche Kontinuumhypothese[3]);

II. die Forderung, daß es, ordinal gesprochen, keine reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex außer ω gibt[4]).

Wir zeigen dann:

1. die *Kategorizität* unseres Axiomensystems (§ 4); der Nachweis beruht wesentlich auf geschlossenen Ausdrücken für Summe (§ 2) und Produkt (§ 3) von Kardinalzahlen;

---

[1]) Vgl. z. B. R. Baer, Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 536; J. v. Neumann, Journal für d. reine u. angewandte Mathematik **154** (1925), S. 219 ff.; St. Zaremba, La Logique des Mathématiques, Mémor. d. sc. math. Fasc., **15** (1926) S. 13—14. Allerdings war es bisher nicht möglich, was für unsere Zwecke auch unnötig ist, diese Erweiterung so vorzunehmen, daß alle bekannten Axiome der Mengenlehre gültig bleiben.

[2]) Vgl. A. Tarski, Fundamenta Mathematicae **7** (1925), S. 1—15. Vgl. auch: L. Patai, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 321—330.

[3]) Für deren Formulierung vgl. Tarski, a. a. O. S. 9.

[4]) Vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl., Leipzig 1914, S. 130 bis 131, ferner P. Mahlo, Leipziger Berichte, Math.-phys. Klasse **63** (1911), S. 187—200; in der Mahloschen Terminologie fordern wir, daß es keine $\varkappa_1$-Zahl größer als ω geben solle.

2. die *Vollständigkeit* in dem Sinne, daß sich die Hausdorffsche Rekursionsformel[5]) (§ 3) und die Zermelosche Kardinalzahlungleichung[6]) aus unsern Axiomen herleiten läßt, die ja die meisten arithmetischen Aussagen über Kardinalzahlen enthält (§ 4).

3. Auf *Unabhängigkeit* unserer Axiome kommt es uns im allgemeinen nicht an, jedoch zeigen wir (§ 5)

a) die *Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese* von unsern andern Axiomen; damit ist zwar nicht bewiesen, daß die Kontinuumhypothese von den Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist[7]); aber es folgt daraus, daß sie sich aus den bekannten formalen Gesetzen nicht herleiten läßt.

Zu diesem Nachweis benutzen wir wesentlich die im § 1 bewiesene Tatsache, daß der Ordnungstypus der Menge der Kardinalzahlen im wesentlichen schon durch Axiome bestimmt ist, die von der Multiplikation der Kardinalzahlen unabhängig sind; daraus folgt dann auch die Verträglichkeit der Kontinuumhypothese (I.) mit den übrigen Axiomen, wenn nur die übrigen Axiome widerspruchsfrei sind.

b) die *Widerspruchslosigkeit* von II, d. h. präziser: Ist eine Kardinalzahlarithmetik widerspruchsfrei, die II. nicht erfüllt, so auch eine, die II. genügt[8]).

Es bleibt noch übrig, die von uns benutzten mengentheoretischen Voraussetzungen zu formulieren:

M_1. Es werden nur wohlgeordnete Mengen betrachtet.

M_2. Von zwei wohlgeordneten Mengen ist eine einem Anfangsstück der andern ähnlich[9]).

M_3. Es liege eine Einteilung der Ordinalzahlen in Zahlklassen auf Grund der Cantorschen Erzeugungsprinzipien vor:

(-1). Die endlichen Zahlen bilden die (-1)-te Zahlklasse.

(ν). Sei bereits die ϱ-te Zahlklasse für jedes $\varrho < \nu$ vollständig gebildet; die erste Zahl, die nicht zu einer der bereits erzeugten Zahlklassen gehört, sei ω_ν, die Anfangszahl der ν-ten Zahlklasse.

---

[5]) F. Hausdorff, J. D. M. V. **13** (1904), S. 570.

[6]) E. Zermelo, Math. Annalen **65** (1908), S. 277, Nr. 33 VI, Theorem.

[7]) Was neuerdings für wahrscheinlich gehalten wird. Vgl. hierzu die neue Wendung, die Hilbert dem Kontinuumproblem gegeben hat; D. Hilbert, Math. Annalen **95** (1926), S. 161—190.

[8]) Diese Tatsache sowie ihren Beweis im Rahmen der Mengenlehre entnehme ich einem Vortrage von Herrn Prof. Dr. E. Zermelo im Freiburger mathematischen Kolloquium vom 7. II. 1928; für die Erlaubnis zur Publikation bin ich Herrn Prof. Zermelo dankbarst verpflichtet.

[9]) Außer dieser Abbildung werden wir nur effektiv vorliegende Abbildungen zu betrachten haben.

Mit μ gehöre auch $\mu+1$ zur ν-ten Zahlklasse.

Ist $\{\mu_\sigma\}$ eine Folge von Elementen der ν-ten Zahlklasse vom Ordnungstypus $\leqq \omega_\nu$, so ist auch $\lim \mu_\sigma$ Element der ν-ten Zahlklasse[10]).

Dies ist die schwierigste Voraussetzung; denn sie enthält ein ungelöstes Problem aus der Theorie der Ordinalzahlen, ungelöst wenigstens, wenn man die Benutzung der eineindeutigen Abbildbarkeit von Mengen im allgemeinsten [naiven] Sinne vermeiden will, wie dies ja für uns nötig ist[11]).

M_4. Entsteht die Ordinalzahl ν aus σ durch eine in unserer Mengenlehre effektiv ausführbare „Umordnung", so gehören ν und σ zur gleichen Zahlklasse.

Diese Forderung muß an die Einteilung in Zahlklassen gestellt werden; man darf es aber auch, da die Umordnung der größeren in die kleinere Ordinalzahl die Erzeugung der größeren gemäß den Erzeugungsprinzipien der Klasse der kleineren Ordinalzahl liefert.

M_5. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Mengen m_ν läßt sich so in eine Reihe von Mengen $\mathfrak{M}_\mu$ aufspalten:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_\mu + \ldots,$$

daß zwei m_ν dann und nur dann zum gleichen $\mathfrak{M}_\mu$ gehören, wenn ihr Ordnungstypus im Sinne von M_3 zur gleichen Zahlklasse gehört.

M_6. Aus einer jeden Menge von Paaren lassen sich die Untermengen aller und nur der Paare mit gleichem ersten Element aussondern und eine zu M_5 analoge Zerlegung bewirken.

M_7. Aus einer jeden Menge $\mathfrak{M}$ von Paaren läßt sich eine solche Teilmenge $\mathfrak{T}$ aussondern, daß

a) keine zwei Paare aus $\mathfrak{T}$ gleiches erstes Element haben,

b) zu jedem Paar aus $\mathfrak{M}$ es wenigstens eines aus $\mathfrak{T}$ mit gleichem ersten Element gibt.

M_8. Addition und Multiplikation der [endlichen] Ordinalzahlen.

An Literatur über Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik ist im wesentlichen nur eine Abhandlung von A. Fraenkel[12]) zu erwähnen, die aber mit wesentlich geringeren Voraussetzungen arbeitet und andere Ziele verfolgt.

---

[10]) Die Numerierung der Zahlklassen unterscheidet sich in etwas von der üblichen (nur wenn $\nu < \omega$ ist), dagegen ist die der Anfangszahlen ω_ν mit $\nu \geqq 0$ die übliche.

[11]) Vgl. D. Hilbert, loc. cit., besonders S. 182 ff.; O. Becker, Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung **8** (1927), S. 794–800.

[12]) A. Fraenkel, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 153–188.

Bezeichnungen:

K.-Z. = Kardinalzahl.

O.-Z. = Ordinalzahl.

O.-Z.en werden durch kleine griechische, K.-Z.en durch kleine deutsche Buchstaben bezeichnet; allgemein sind $\mathfrak{k}_\nu$ K.-Z.en, der Index ν ihr Stellenzeiger in der Reihe der K.-Z.en, ν also eine O.-Z. Unendliche K.-Z.en werden auch als $\aleph$-s bezeichnet: $\aleph_\nu$, wobei wieder ν der Stellenzeiger in der Reihe der $\aleph$-s ist.

Endliche Zahlen werden mit kleinen lateinischen Buchstaben n, i, ... bezeichnet.

Unter ω, ω^2, ω_1 usw. sind die üblichen transfiniten Ordnungszahlen zu verstehen.

Schließlich bedeutet, wie üblich, $a \varepsilon A$: a ist Element der Menge A.

§ 1.

Der Ordnungstypus der Menge der Kardinalzahlen.

Sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller K.-Z.en: $\mathfrak{k}_\nu$.

I. $\mathfrak{K}$ *ist wohlgeordnet.*

Der Index ν von $\mathfrak{k}_\nu$ kann also als O.-Z. aufgefaßt werden, die die Stelle von $\mathfrak{k}_\nu$ in $\mathfrak{K}$ charakterisiert ($\mathfrak{k}_\nu < \mathfrak{k}_\mu$ dann und nur dann, wenn $\nu < \mu$ ist); $\nu \geqq 0$.

Sei $\mathfrak{k}_\nu$ eine feste K.-Z. und durchlaufe μ alle O.-Z.en: $1 \leqq \mu < \varrho$; dann nennen wir die Menge aller geordneten Paare $(\mathfrak{k}_\nu, \mu)$ eine „*Menge von* ϱ *bzw., wenn* ϱ *keine Limeszahl ist,* $\varrho - 1$ *gleichen* K.-Z.*en*“ [13]), [14]).

Haben wir weiter eine Menge von Mengen gleicher K.-Z.en, so daß verschiedene Mengen gleicher K.-Z.en durch verschiedene K.-Z.en charakterisiert werden, so nennen wir die Vereinigungsmenge, die eine Menge von Paaren ist, eine „*Menge von* [*gleichen oder verschiedenen*] K.-Z.*en*“ [13]), [14]).

Definition 1. *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine wohlgeordnete Menge von* K.-Z.*en,* μ *ihre* O.-Z., *ist weiter* $\omega_\nu \leqq \mu < \omega_{\nu+1}$, *d. h.* ν *die Nummer der Zahlklasse von* μ, *ist schließlich* $\varkappa$ *die* O.-Z. *von* $\mathfrak{K}$, *so heißt* $\mathfrak{M}$ *dann und nur dann konvergent, wenn* $\nu < \varkappa$ *ist* ($\nu \neq \varkappa$) [15]).

[13]) Dies dient dem bequemeren Sprachgebrauch, da es ja an sich nicht angeht, daß in Mengen mehrere „gleiche“ Elemente vorkommen, andererseits es zu umständlich wäre, dauernd von Paarmengen zu sprechen, schließlich Mißverständnisse kaum zu befürchten sind.

[14]) Wegen M_1 lassen wir das Wort „wohlgeordnet“ bei Mengen i. a. fort.

[15]) Es genügt nicht $\mu < \varkappa$ zu fordern, da dann $\varkappa = \omega_{\omega_1}$ werden könnte, nicht aber, wie unser Ziel, gleich der ersten π_1-Zahl $> \omega$, im Sinne von Mahlo, loc. cit.

Sei jetzt $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge von K.-Z.en; unter $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$ verstehen wir dann die kleinste K.-Z., die wenigstens so groß ist wie eine jede K.-Z. aus $\mathfrak{M}$; daß stets $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}$ existiert, folgt aus der Definition der konvergenten Mengen; gibt es in $\mathfrak{M}$ eine größte K.-Z., so ist diese $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$; sonst ist $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$ die kleinste K.-Z., die größer ist als alle K.-Z.en aus $\mathfrak{M}$.

Wir ordnen jetzt jeder konvergenten Menge $\mathfrak{M}$ von [gleichen oder verschiedenen] K.-Z.en ihre *Summe*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \sum_{\mathfrak{k}_\nu \in \mathfrak{M}} \mathfrak{k}_\nu$$

zu, wobei auf der rechten Seite jedes $\mathfrak{k}_\nu$ in derselben Vielfachheit auftritt wie in $\mathfrak{M}$; dann gilt:

II. *Ist $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge verschiedener* K.-Z.*en, unter denen es keine größte gibt*[16]*), so ist*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \operatorname{Max}(\mathfrak{M}).$$

III. *Ist $\mathfrak{k}_\varrho$ eine* K.-Z. *derart, daß $\varrho > \omega$ und eine Limeszahl ist, so gibt es eine Folge $\mathfrak{M}$ wachsender* K.-Z.*en, deren Ordnungstypus $\sigma < \omega_\varrho$ ist, so daß*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{k}_\varrho$$

ist.

Die Bedingungen für $\mathfrak{M}$ sind ja derart, daß $\mathfrak{M}$ konvergent und also II. anwendbar ist.

Es gilt dann bereits der

Satz 1. *Seien $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei Systeme von* K.-Z.*en, die*

1. *den Axiomen* I.—III. *genügen,*

2. *deren Ordnungstypus eine Limeszahl $> \omega$ ist,*

dann sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ähnlich, haben den gleichen Ordnungstypus.

Beweis. Wegen I. und M_2 muß von den Systemen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ eines einem Anfangsstück des andern ähnlich sein; o. B. d. A. sei $\mathfrak{K}_1$ einem Anfangsstück von $\mathfrak{K}_2$ ähnlich.

Wäre jetzt unser Satz falsch, so gäbe es ein erstes Element in $\mathfrak{K}_2$, das nicht Bild eines Elementes aus $\mathfrak{K}_1$ ist; sei dies $\mathfrak{k}_\varrho^{(2)}$. Dann ist ϱ der Ordnungstypus von $\mathfrak{K}_1$ und also nach Voraussetzung 2 eine Limeszahl $> \omega$. Wir können also in $\mathfrak{K}_2$ Axiom III auf $\mathfrak{k}_\varrho^{(2)}$ anwenden; es gibt demnach eine Folge wachsender K.-Z.en $\mathfrak{M}^{(2)} = \{\mathfrak{k}_{\sigma_\nu}^{(2)}\}$, so daß

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}^{(2)}) = \sum_{1 \leqq \nu < \tau} \mathfrak{k}_{\sigma_\nu}^{(2)} = \mathfrak{k}_\varrho^{(2)}$$

und $\tau < \omega_\varrho$ ist.

[16]) Eine solche Menge von K.-Z.en nennen wir auch eine gegen $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$ konvergente, wachsende Folge von K.-Z.en.

Also ist, wenn $\mathfrak{k}_{\sigma_\nu}^{(1)}$ das Element aus $\mathfrak{K}_1$ ist, dessen Bild bei der vorliegenden ähnlichen Abbildung auf $\mathfrak{K}_2$ gerade $\mathfrak{k}_{\sigma_\nu}^{(2)}$ ist, die Gesamtheit $\mathfrak{M}^{(1)} = \{\mathfrak{k}_{\sigma_\nu}^{(1)}\}$ $(1 \leqq \nu < \tau < \omega_\varrho)$ eine konvergente Folge wachsender K.-Z.en; wegen II. ist also $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}^{(1)}) \equiv \sum \mathfrak{k}_{\sigma_\nu}^{(1)} = \mathfrak{k}_{\lim \sigma_\nu}^{(1)} = \mathfrak{k}_\varrho^{(1)}$ existent in $\mathfrak{K}_1$ im Widerspruch mit unserer Annahme; also ist unser Satz richtig.

§ 2.

Die Addition der Kardinalzahlen.

Definition 2. *Eine* K.-Z. $\mathfrak{k}_\nu$ *ist endlich, wenn* $0 \leqq \nu < \omega$ *ist, sonst unendlich oder transfinit. Das* ν*-te Glied in der der Größe nach wohlgeordneten Reihe der unendlichen* K.-Z.*en nennen wir* $\aleph_\nu$*; dann wird* $\mathfrak{k}_\nu = \aleph_\nu$ *für alle* $\nu \geqq \omega^2$*; sind aber* n*,* m *endliche Zahlen,* $\omega \leqq \nu < \omega^2$*, so wird* $\mathfrak{k}_\nu = \mathfrak{k}_{n\cdot\omega+m} = \aleph_{(n-1)\omega+m}$.

Definition 3. *Ist* ν *eine transfinite* O.-Z. *der* μ*-ten Zahlklasse, d. h.* $\omega_\mu \leqq \nu < \omega_{\mu+1}$*, so sei* $\bar{\nu} = \aleph_\mu$.

An dieser Stelle werden M_3 und M_4 entscheidend benutzt.

IVa. *Sind* $\mathfrak{k}_\nu$ *und* $\mathfrak{k}_\mu$ *endlich, so ist*

$$\mathfrak{S}(\{\mathfrak{k}_\nu, \mathfrak{k}_\mu\}) \equiv \mathfrak{k}_\nu + \mathfrak{k}_\mu = \mathfrak{k}_{\nu+\mu}.^{17})$$

IVb. *Ist von den* K.-Z.*en* $\mathfrak{k}_\nu$ *und* $\mathfrak{k}_\mu$ *eine unendlich, so ist*

$$\mathfrak{S}(\{\mathfrak{k}_\nu, \mathfrak{k}_\mu\}) \equiv \mathfrak{k}_\nu + \mathfrak{k}_\mu = \mathrm{Max}(\mathfrak{k}_\nu, \mathfrak{k}_\mu).$$

V. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *zwei konvergente Mengen von* K.-Z.*en und besteht eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von* $\mathfrak{M}_1$ *auf einen Teil von* $\mathfrak{M}_2$*, so daß das zugeordnete Element von* $\mathfrak{M}_2$ *nicht kleiner als das entsprechende Element von* $\mathfrak{M}_1$ *ist, so ist*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}_1) \leqq \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_2).$$

Man bemerke, daß die Axiome II und IV voneinander völlig unabhängig sind, während in den Fällen von II und IV Axiom V ableitbar ist.

Wir brauchen im folgenden noch die *Multiplikation* zweier K.-Z.en: $\mathfrak{P}(\mathfrak{k}_\nu, \mathfrak{k}_\mu) \equiv \mathfrak{k}_\nu \cdot \mathfrak{k}_\mu$; diese erfüllt:

VIa. *Sind* $\mathfrak{k}_\nu$ *und* $\mathfrak{k}_\mu$ *endlich, so sei*

$$\mathfrak{k}_\nu \cdot \mathfrak{k}_\mu = \mathfrak{k}_{\nu\cdot\mu}.^{17})$$

VIb. *Ist von den* K.-Z.*en* $\mathfrak{k}_\nu$ *und* $\mathfrak{k}_\mu$ *wenigstens eine unendlich, keine Null, so ist*:

$$\mathfrak{k}_\nu \cdot \mathfrak{k}_\mu = \mathrm{Max}(\mathfrak{k}_\nu, \mathfrak{k}_\mu) \quad (\textit{Absorptionsgesetz}).$$

---

[17]) Hier wird M_8 benutzt.

VII. *Ist $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge gleicher* K.-Z.*en, nämlich $\mathfrak{k}_\mu \neq 0 = \mathfrak{k}_0$, ist α der Ordnungstypus von $\mathfrak{M}$, so ist*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \bar{\alpha} \cdot \mathfrak{k}_\mu \text{ [18]}).$$

Dann gilt der

Satz 2. *Ist α der Ordnungstypus der konvergenten Menge $\mathfrak{M}$ von* K.-Z.*en $\neq \mathfrak{k}_0 = 0$ und ist von den* K.-Z.*en $\bar{\alpha}$ und* $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$ *wenigstens eine unendlich, so ist*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \bar{\alpha} \cdot \operatorname{Max}\mathfrak{M} = \operatorname{Max}[\bar{\alpha}, \operatorname{Max}\mathfrak{M}].$$

Beweis. Entsteht $\mathfrak{M}_1$ aus $\mathfrak{M}$, indem man jede K.-Z. aus $\mathfrak{M}$ durch $\operatorname{Max}\mathfrak{M}$ ersetzt, so ist wegen V und VII:

$$(1) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) \leqq \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_1) = \bar{\alpha} \cdot \operatorname{Max}\mathfrak{M}_1 = \bar{\alpha} \cdot \operatorname{Max}\mathfrak{M}.$$

Da aber jede K.-Z. aus $\mathfrak{M}$ mindestens gleich $1 = \mathfrak{k}_1$ ist, so folgt ebenfalls aus V:

$$(2) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) \geqq \mathfrak{P}(1, \bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$$

n. V. und VI, VII.

Sei schließlich $\mathfrak{M}_2$ die aus $\mathfrak{M}$ entstehende Menge von K.-Z.en, wenn man jedes Element aus $\mathfrak{M}$ entweder durch sich oder durch Null ersetzt, je nachdem es das erste seiner Art ist oder nicht (bei der Bildung von $\mathfrak{M}_2$ wird der Prozeß M_7 angewandt), so ist:

$$(3) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) \geqq \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_1) = \operatorname{Max}\mathfrak{M}_1 = \operatorname{Max}\mathfrak{M}$$

wegen V, II, IV.

Aus (2) und (3) folgt aber:

$$(4) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) \geqq \operatorname{Max}[\bar{\alpha}, \operatorname{Max}\mathfrak{M}],$$

aus (1) und (4) nebst VIb also unser Satz.

Zusatz. *Für die Addition gelten das kommutative und das assoziative Gesetz.*

Denn die Summe hängt nach Satz 2 nur von der Zahl und dem Maximum der Summanden ab.

§ 3.

Die Multiplikation der Kardinalzahlen.

Wir führen jetzt auch *Produkte beliebiger konvergenter Mengen von* K.-Z.*en $\neq 0$* ein und schreiben:

---

[18]) Vertritt m. E. das distributive Gesetz; vgl. Fraenkel, loc. cit. S. 161, Axiom VIII. Wenn α und $\mathfrak{k}_\mu$ endlich sind, so folgt VII aus VIa und IVa.

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \equiv \prod_{\mathfrak{k}_\nu \varepsilon \mathfrak{M}} \mathfrak{k}_\nu,$$

wobei die $\mathfrak{k}_\nu$ in der nötigen Vielfachheit zu nehmen sind.

Produkte von endlich viel Faktoren sind nach VI bereits bestimmt; für sie sind die folgenden Axiome VIII und IX ableitbare Sätze.

VIII. *Für die Multiplikation gelten das kommutative und das assoziative Gesetz, d. h. es sind beliebige Umordnungen, Zusammenfassungen usw. von Faktoren möglich.*

IX. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *zwei den Bedingungen des Axiom* V *genügende konvergente Mengen von* K.-Z.*en, so ist*:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_1) \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{M}_2).$$

Definition 4. *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine Menge gleicher* K.-Z.*en, nämlich* $\mathfrak{k}_\mu$, *vom Ordnungstypus* α *und ist* $\bar{\alpha} = \mathfrak{k}_\nu$, *so ist* $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \equiv \mathfrak{k}_\mu^{\mathfrak{k}_\nu}$.

X. *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine konvergente Menge wachsender* K.-Z.*en vom Limeszahltypus* α, *so ist*

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = [\operatorname{Max} \mathfrak{M}]^{\bar{\alpha}}.$$ [19])

Definition 5. *Ist* λ *eine* K.-Z., *und zwar eine Limeszahl* ω, *so ist die kleinste mit* λ *konfinale* O.-Z. *eine Anfangszahl* ω_ϱ [20]); *wir setzen*

$$\varrho = cf(\lambda).$$

XIa. $\aleph_{\lambda+1}^{\aleph_\nu} = \aleph_{\lambda+1}$, *wenn* $\nu \leqq \lambda$,

$= \aleph_{\nu+1}$, *wenn* $\nu \geqq \lambda$ *ist.*

XIb. *Ist* λ *Limeszahl, so ist*:

$\aleph_\lambda^{\aleph_\nu} = \aleph_\lambda$, *wenn* $\nu < cf(\lambda)$,

$= \aleph_{\lambda+1}$, *wenn* $cf(\lambda) \leqq \nu \leqq \lambda$,

$= \aleph_{\nu+1}$, *wenn* $\lambda \leqq \nu$ *ist* [21]).

Aus XI und VI folgt der

Satz 3. 1. $(\aleph_\mu^{\aleph_\nu})^{\aleph_\lambda} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu \cdot \aleph_\lambda}$

2. $\aleph_{\mu+1} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_{\mu+1}$ *für* $\nu \leqq \mu + 1$
(*Hausdorffsche Rekursionsformel*)

3. $2^{\aleph_\nu} = n^{\aleph_\nu} = \aleph_0^{\aleph_\nu}$ *für jedes endliche* $n = \mathfrak{k}_n > 1$.

[19]) Vgl. Tarski, loc. cit., wo allerdings nur Spezialfälle dieser Formel bewiesen werden, während die allgemeine Formel, S. 19, noch als offenes Problem bezeichnet wird. Vgl. Satz 9 des § 6!

[20]) Vgl. Hausdorff, Einführung S. 130.

[21]) Dies ist die verallgemeinerte Cantorsche Kontinuumhypothese in der ihr von Tarski, loc. cit., S. 9, gegebenen Form; nach Tarski, loc. cit., läßt sich XIb aus XIa, X und VI herleiten.

Satz 4. *Ist n eine endliche* O.-Z., *so ist*:

$$\prod_{i=1}^{n} \aleph_{\mu_i}^{\aleph_{\alpha_i}} = \aleph_{\mu_n}^{\aleph_\alpha}, \quad \text{wenn} \quad \mu_n \leqq \alpha + 1$$
$$= \aleph_{\mu_n}^{\aleph_{\alpha_n}}, \quad \text{wenn} \quad \mu_n > \alpha + 1 \quad \text{ist},$$

wobei $\mu_n = \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,n} \mu_i$, $\alpha = \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$, $\aleph_{\mu_i} \neq \aleph_{\mu_k}$ *für* $i \neq k$ *ist.*

Beweis. A. Sei $\mu_n > \alpha + 1$. Dann ist für $1 \leqq i \leqq n-1$

$$\aleph_{\mu_i}^{\aleph_{\alpha_i}} \leqq \operatorname{Max}(\aleph_{\mu_i+1}, \aleph_{\alpha_i+1}) \leqq \operatorname{Max}(\aleph_{\mu_i+1}, \aleph_{\alpha+1}) \leqq \aleph_{\mu_n}.$$

Also ist $\prod_{i=1}^{n} \aleph_{\mu_i}^{\aleph_{\alpha_i}} = \aleph_{\mu_n} \cdot \aleph_{\mu_n}^{\aleph_{\alpha_n}} = \aleph_{\mu_n}^{\aleph_{\alpha_n}}$ wegen VIb.

B. Sei $\mu_n \leqq \alpha + 1$ und $\alpha_k = \alpha$; dann ist:

$$\prod_{i=1}^{n} \aleph_{\mu_i}^{\aleph_{\alpha_i}} \leqq \aleph_{\mu_n}^{\aleph_\alpha} \quad \text{und} \quad \geqq \aleph_{\mu_k}^{\aleph_\alpha};$$

wegen XI ist aber

$$\aleph_{\mu_k}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\mu_n}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1},$$

womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Sei jetzt $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge von $\aleph$-s; sei $\operatorname{Max} \mathfrak{M} = \aleph_\mu$.

Sei $\mathfrak{M}_1$ die nach M_τ aus $\mathfrak{M}$ entstehende Menge aller verschiedenen $\aleph$-s aus $\mathfrak{M}$; wegen VIII können wir annehmen, daß die Elemente von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_1$ der Größe nach, nicht abnehmend geordnet seien; ist ϱ bzw. ϱ_1 der Ordnungstypus von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_1$, so sei:

$$\bar{\varrho} = \aleph_\alpha, \qquad \bar{\varrho}_1 = \aleph_\beta.$$

Es ist also $\aleph_\alpha$ die Anzahl der Faktoren von $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ überhaupt, $\aleph_\beta$ die Faktorenzahl, wenn $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ als Potenzprodukt geschrieben ist. Tritt schließlich $\aleph_\mu$ in $\mathfrak{M}$ wirklich auf, so sei $\aleph_\gamma$ die Vielfachheit, in der $\aleph_\mu$ auftritt, wenn $\aleph_\mu$ unendlich oft auftritt. Tritt aber $\aleph_\mu$ nur endlich oft auf, so wollen wir die Vielfachheit von $\aleph_\mu$ auch mit $\aleph_\gamma$ bezeichnen, indem wir $\mathfrak{k}_1 = 1 = \aleph_{-1}$ setzen und $\aleph_\nu^n = \aleph_\nu$ wegen VI bedenken.

Satz 5. *Ist $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge von Alefs, so ist*:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\alpha}, \quad \text{wenn} \quad \mu \leqq \alpha + 1;$$

ist aber $\mu > \alpha + 1$, so ist:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\beta},$$

wenn $\aleph_\mu$ durch von ihm verschiedene Faktoren aus $\mathfrak{M}$ approximiert wird; *sonst ist*:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}$$ [22], [23].

---

[22]) Dieser Satz enthält Satz 4 als Spezialfall.

[23]) Hieraus folgt auch die Verträglichkeit von VI, X und XI mit IX.

Beweis. Wegen IX und Satz 3, 3 gilt zunächst:

$$\aleph_0^{\aleph_\alpha} \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \leqq \aleph_\mu^{\aleph_\alpha}. \tag{5}$$

Ist jetzt $\mu \leqq \alpha + 1$, so folgt aus XI:

$$\aleph_0^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

In diesem Falle ist also der Satz bewiesen.

Sei also $\mu > \alpha + 1$.

1. Fall. $\aleph_\mu$ trete in $\mathfrak{M}$ nicht auf. Dann wird also $\aleph_\mu$ durch die $\aleph$-s aus $\mathfrak{M}$ approximiert, und es ist notwendig:

$$cf(\mu) \leqq \beta \leqq \alpha < \mu.$$

Ist weiter $\mathfrak{M}_1$ die Menge der verschiedenen $\aleph$-s aus $\mathfrak{M}$, so gilt wegen IX und X:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \geqq \mathfrak{P}(\mathfrak{M}_1) = \aleph_\mu^{\aleph_\beta}. \tag{6}$$

Aus (5), (6) und XIb folgt dann wegen: $\aleph_\mu^{\aleph_\beta} = \aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\mu+1}$

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\beta}.$$

2. Fall. $\aleph_\mu$ trete in $\mathfrak{M}$ auf.

Sei $\mathfrak{M}'$ die Gesamtheit der von $\aleph_\mu$ verschiedenen Faktoren aus $\mathfrak{M}$. Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 21. $\operatorname{Max}\mathfrak{M}' < \operatorname{Max}\mathfrak{M}$.

Dann folgt aus Satz 4, (5), XI und VI, daß

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}$$

ist.

Fall 22. $\operatorname{Max}\mathfrak{M}' = \operatorname{Max}\mathfrak{M}$.

Hier fällt aber $\mathfrak{M}'$ unter Fall 1, so daß:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}') = \aleph_\mu^{\aleph_\beta}$$

ist.

Also wird

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\mu^{\aleph_\gamma} = \operatorname{Max}(\aleph_\mu^{\aleph_\beta}, \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}) = \aleph_\mu^{\operatorname{Max}(\aleph_\beta, \aleph_\gamma)} = \aleph_\mu^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma}.$$

Da aber wieder

$$cf(\mu) \leqq \beta \leqq \alpha < \mu \quad \text{und} \quad \gamma \leqq \alpha < \mu$$

ist, so wird wieder:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\beta} = \aleph_{\mu+1}.$$

Damit ist gleichzeitig auch der folgende Zusatz bewiesen:

Zusatz. *Es ist* $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_{\alpha+1}$, *wenn* $\mu \leqq \alpha + 1$.

Ist $\mu > \alpha + 1$ *und wird* $\aleph_\mu$ *durch kleinere* $\aleph$*-s aus* $\mathfrak{M}$ *approximiert, so wird:*

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_{\mu+1}, \quad \textit{sonst aber}$$
$$= \aleph_\mu^{\aleph_\gamma},$$

wo $\aleph_\gamma$ *die Vielfachheit von* $\aleph_\mu$ *in* $\mathfrak{M}$ *ist.*

§ 4.

Kategorizität und Vollständigkeit.

XII. *Es gibt in* $\mathfrak{K}$ *das Element* $\mathfrak{k}_\omega = \aleph_0$.

Also existieren auch alle endlichen Zahlen.

Dann gilt der

Satz 6. *Sind* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *zwei den Axiomen* I. -XII. *genügende Systeme von* K.-Z.*en, so gibt es eine eineindeutige Abbildung von* $\mathfrak{K}_1$ *auf* $\mathfrak{K}_2$, *die*

1. *ähnlich und*

2. *isomorph hinsichtlich Addition und Multiplikation ist,*

d. h. das Axiomensystem ist kategorisch.

Beweis. Da stets $\aleph_0^{\aleph_\nu} > \aleph_\nu$ ist und mit $\aleph_\nu$ auch $\aleph_0^{\aleph_\nu}$ existiert, so läßt sich Satz 1 wegen XII anwenden; es ist zu zeigen, daß die danach existierende ähnliche Abbildung a von $\mathfrak{K}_1$ auf $\mathfrak{K}_2$ auch isomorph gegenüber Addition und Multiplikation ist.

Aus XI folgt sofort, daß a gegenüber der Potenzierung isomorph ist; aus Satz 5 und Satz 3, 3. folgt die Isomorphie von a gegenüber Multiplikation, da diese ja für endliche Produkte trivial ist und bei unendlichen die endlichen Faktoren o. B. d. A. durch $\aleph_0$ ersetzt werden können; bei endlichen $\aleph$-Produkten folgt die Isomorphie schließlich aus der wegen VI bestehenden Formel:

$$\prod_{i=1}^{n} \aleph_{\nu_i} = \operatorname{Max} \aleph_{\nu_i}.$$

Analog folgt die Isomorphie von a gegenüber der Addition aus Satz 2.

Satz 7. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *zwei konvergente Mengen von* K.-Z.*en, so daß*

1. $\mathfrak{M}_1$ *eineindeutig auf* $\mathfrak{M}_2$ *abgebildet ist,*

2. *bei dieser Abbildung jedem Element aus* $\mathfrak{M}_1$ *in* $\mathfrak{M}_2$ *ein größeres zugeordnet ist,*

dann ist: $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}_1) < \mathfrak{P}(\mathfrak{M}_2)$ (*Zermelosche Kardinalzahlungleichung*[24]).

[24]) Vgl. Anm. [6]).

Beweis. Enthalten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ nur endlich viele Elemente und sind diese Elemente alle endlich, so ist die Ungleichung wegen M_8 bekannt; gibt es unter den [endlich viel] Elementen auch $\aleph$-s, so ist wenigstens $\mathfrak{M}_2$ und (wenn $\mathfrak{M}_1$ auch $\aleph$-s enthält, auch $\mathfrak{M}_1$) gleich dem größten unter diesen; nach Voraussetzung 2 muß dann $\mathrm{Max}(\mathfrak{M}_2) > \mathrm{Max}(\mathfrak{M}_1)$ sein.

Wir können also annehmen, daß $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ nur $\aleph$-s enthalten und je unendlich viele (endlich viele endliche Zahlen würden ja von den folgenden $\aleph$-s absorbiert werden), unendlich viele endliche K.-Z.en können aber je durch $\aleph_0$ ersetzt werden.

Nach Voraussetzung 1 sind die Elementeanzahlen von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gleich, etwa $\aleph_\alpha$. Sei weiter $\aleph_{\mu_i} = \mathrm{Max}\,\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2)$, $\aleph_\beta$ die Zahl der verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{M}_2$, $\aleph_\gamma$ die Vielfachheit von $\aleph_{\mu_2}$ in $\mathfrak{M}_2$, wenn es überhaupt in $\mathfrak{M}_2$ auftritt.

Nach Satz 2 ist dann:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}_1) = \aleph_\alpha \cdot \aleph_{\mu_1}. \tag{7}$$

Weiter gilt sicher wegen Voraussetzung 2:

$$\aleph_{\mu_1} \leqq \aleph_{\mu_2} \tag{8}$$

und also

$$\mu_1 \leqq \mu_2. \tag{8a}$$

Ist $\mu_2 \leqq \alpha + 1$, so ist nach dem Zusatz zu Satz 5: $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_2) = \aleph_{\alpha+1}$. Dann muß aber $\aleph_{\mu_1} < \aleph_{\alpha+1}$ sein, da sonst in Widerspruch zur Voraussetzung 2 in $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ das Glied $\aleph_{\alpha+1}$, das sich ja nicht durch kleinere $\aleph$-*s* approximieren läßt, als größtes auftreten würde.

Sei also im folgenden $\mu_2 > \alpha + 1$.

Wird jetzt $\aleph_{\mu_2}$ durch kleinere $\aleph$-s aus $\mathfrak{M}_2$ approximiert, so ist nach dem Zusatz zu Satz 5:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_2) = \aleph_{\mu_2+1} &> \aleph_{\alpha+1} \\ &> \aleph_{\mu_2} \geqq \aleph_{\mu_1}.\end{aligned}$$

Es bleibt also wegen (7) und (8) nur noch der Fall zu diskutieren, daß $\aleph_{\mu_1} = \aleph_{\mu_2}$ und daß $\aleph_{\mu_2}$ durch kleinere $\aleph$-s aus $\mathfrak{M}_2$ nicht approximiert wird. Nach dem Zusatz zu Satz 5 ist dann:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_2) = \aleph_{\mu_2}^{\aleph_\gamma}.$$

Wegen Voraussetzung 2 darf $\aleph_{\mu_1}$ nicht in $\mathfrak{M}_1$ auftreten und muß durch $\aleph_\gamma$ kleinere $\aleph$-s aus $\mathfrak{M}_1$ approximiert werden. Daraus folgt aber

$$cf(\mu_1) = cf(\mu_2) \leqq \gamma \leqq \alpha < \mu_1 = \mu_2,$$

d. h. wegen XI

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_2) = \aleph_{\mu_2+1},$$

womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

§ 6.

Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit.

Satz 8. *Sei* $\mathfrak{K}_1$ *ein System von* K.-Z.*en, das den Axiomen* I, II, IV—XII, *aber nicht* III *genügt; sei* $\aleph_\varkappa$ *die erste* III *widersprechende* K.-Z. *aus* $\mathfrak{K}_1$;[25]) *das System* $\mathfrak{K}$ *aller* K.-Z.*en* $< \aleph_\varkappa$ *aus* $\mathfrak{K}_1$ *genügt dann* I—XII.[26])

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{K}_1$ konvergente Menge und $\aleph_\mu = \operatorname{Max}\mathfrak{M}$, $\aleph_\alpha$ die Elementezahl von $\mathfrak{M}$; dann und nur dann ist $\mathfrak{M}$ auch in $\mathfrak{K}$ konvergent, wenn $\operatorname{Max}[\aleph_\mu, \aleph_\alpha] < \aleph_\varkappa$ ist. Daraus sowie aus Satz 2, Satz 5 und dem Zusatz zu Satz 5 folgt aber, da $\varkappa > \omega$ Limeszahl ist, daß Summe und Produkt einer in $\mathfrak{K}$ konvergenten Menge von K.-Z.en selbst in $\mathfrak{K}$ gelegen ist, während die Erfülltheit der übrigen Axiome in $\mathfrak{K}$ aus der in $\mathfrak{K}_1$ folgt.

Satz 9. *Sei* $\mathfrak{K}$ *ein System von* K.-Z.*en, in dem die Axiome* I—IX, XI, XII *erfüllt sind; dann und nur dann ist in* $\mathfrak{K}$ *auch* X *erfüllt, wenn in* $\mathfrak{K}$ *die Zermelosche Kardinalzahlungleichung* (*Satz* 7) *gilt*[27]).

Beweis. Wegen Satz 7 ist nur zu zeigen, daß aus den von X verschiedenen Axiomen und aus Satz 7 auch X folgt.

Sei $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge wachsender K.-Z.en, $\aleph_\mu = \operatorname{Max}\mathfrak{M}$, $\aleph_\alpha$ die Elementezahl von $\mathfrak{M}$. Wegen IX gilt dann:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \leqq \aleph_\mu^{\aleph_\alpha}, \tag{9}$$

und wenn $\aleph_\nu$ irgendein Element aus $\mathfrak{M}$ ist:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \geqq \aleph_\nu,$$

also, da dies für alle $\aleph_\nu$ aus $\mathfrak{M}$ wahr ist:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \geqq \aleph_\mu. \tag{10}$$

Da weiter $\mathfrak{M}$ eine Menge wachsender K.-Z.en ist, die $\aleph_\mu$ approximieren, so muß

$$cf(\mu) \leqq \alpha \leqq \mu \tag{10a}$$

sein; aus (9), (10) und XIb folgt also:

$$\aleph_\mu \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \leqq \aleph_{\mu+1}. \tag{11}$$

Enthalte $\mathfrak{M}_1$, der Größe nach geordnet, die K.-Z.en $\mathfrak{k}_{\nu_\sigma}$ und sei $\mathfrak{M}_1 = \{\mathfrak{k}_{\nu_{\sigma+1}}\}$; dann ist für alle σ wahr $\mathfrak{k}_{\nu_\sigma} < \mathfrak{k}_{\nu_{\sigma+1}} = \mathfrak{k}_{\mu_\sigma}$; also folgt aus

[25]) Diese entspricht der ersten π_1-Zahl $> \omega$ im Sinne von P. Mahlo, loc. cit. S. 192.
[26]) Vgl. Anm. [8]).
[27]) Vgl. Anm. [19]).

der Zermeloschen Kardinalzahlungleichung:

(12a) $$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) < \mathfrak{P}(\mathfrak{M}_1);$$

weiter ist offenbar:

(12b) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_1) \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{M});$$

denn jedes Element aus $\mathfrak{M}_1$ kommt auch in $\mathfrak{M}$ vor; also folgt aus (12a) und (12b):

(12) $$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) < \mathfrak{P}(\mathfrak{M}).$$

Da weiter nach (10a) und Satz 2 sowie VI

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu$$

ist, so folgt aus (11) und (12)

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_{\mu+1} = \aleph_\mu^{\aleph_\alpha}.$$ [28])

Satz 10. *Das Axiom* XI *ist von den übrigen Axiomen unabhängig.*

Beweis. Wir ersetzen in unserem Axiomensystem das Axiom XI durch das folgende Axiom:

XI*a. $$\aleph_{\lambda+2}^{\aleph_\nu} = \aleph_{\lambda+2}, \text{ wenn } \nu \leqq \lambda,$$
$$= \aleph_{\nu+2}, \text{ wenn } \nu \geqq \lambda \text{ ist.}$$

Ist λ *Limeszahl, so ist:*

XI*b. $$\aleph_{\lambda+1}^{\aleph_\nu} = \aleph_{\lambda+1}, \text{ wenn } \nu < cf(\lambda),$$
$$= \aleph_{\lambda+2}, \text{ wenn } cf(\lambda) \leqq \nu \leqq \lambda,$$
$$= \aleph_{\nu+2}, \text{ wenn } \lambda \leqq \nu \text{ ist, und}$$

XI*c. $$\aleph_\lambda^{\aleph_\nu} = \aleph_\lambda, \text{ wenn } \nu < cf(\lambda),$$
$$= \aleph_{\lambda+2}, \text{ wenn } cf(\lambda) \leqq \nu \leqq \lambda,$$
$$= \aleph_{\nu+2}, \text{ wenn } \lambda \leqq \nu \text{ ist}$$ [29]).

Dann bleiben die Sätze 1, 2 und 3 unverändert bestehen; an die Stelle des Satzes 5 tritt aber der

Satz 5*. *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine konvergente Menge von* $\aleph$*-s, so ist:*

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\alpha}, \text{ wenn } \mu \leqq \alpha + 2 \text{ ist.}$$

Ist aber $\mu > \alpha + 2$, *so ist, wenn* $\mu = \mu' + 2$ *ist:*

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}, \text{ wenn } \aleph_{\mu'+1} \text{ in } \mathfrak{M} \text{ nicht vorkommt,}$$
$$= \aleph_{\mu'+1}^{\aleph_\gamma} \cdot \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}, \text{ wenn } \aleph_{\mu'+1} \text{ in } \mathfrak{M} \aleph_{\gamma'}\text{-mal auftritt.}$$

[28]) Man beachte, daß bei diesem Beweis wesentlich die verallgemeinerte Cantorsche Kontinuumhypothese XI benutzt wurde, und daß unsere Schlüsse versagen würden, wenn an Stelle von XI etwa die später formulierte Hypothese XI* gesetzt würde.

[29]) Man erhält XI* im wesentlichen aus Tarski, loc. cit. S. 9, durch geeignetes Ansetzen von $\pi(\alpha)$ und Anwendung der Hausdorffschen Rekursionsformel (Satz 3, 2.).

Ist aber $\mu = \mu' + 1$, μ' *Limeszahl, so ist*:

$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}$, *wenn* $\aleph_{\mu'}$ *in* $\mathfrak{M}$ *weder vorkommt noch durch niedere* $\aleph$*-s approximiert wird,*

$= \aleph_{\mu'}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}$, *wenn* $\aleph_{\mu'}$ *durch niedere* $\aleph$*-s approximiert wird,*

$= \aleph_{\mu'}^{\aleph_{\gamma'}} \cdot \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}$, *wenn* $\aleph_{\mu'}$ *zwar nicht durch niedere* $\aleph$*-s approximiert, aber* $\aleph_{\gamma'}$*-mal in* $\mathfrak{M}$ *auftritt.*

Ist schließlich μ *Limeszahl, so ist*:

$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \aleph_\mu^{\aleph_\beta}$, *wenn* $\aleph_\mu$ *durch niedere* $\aleph$*-s aus* $\mathfrak{M}$ *approximiert wird, sonst*

$= \aleph_\mu^{\aleph_\gamma}$.

Man beweist diesen Satz 5* ebenso wie den Satz 5; nur werden durch XI* andere Fallunterscheidungen nötig, wie auch im Satz 5* ausgesprochen. Wir zeigen jetzt:

Satz 11. *Die Axiome* I—X, XI*, XII *werden im gleichen System* $\mathfrak{R}$ *erfüllt wie die Axiome* I—XII.

Aus Satz 11 folgt sofort Satz 10.

Beweis. Nach dem oben Bemerkten ist nur zu zeigen, daß das Produkt einer konvergenten Menge $\mathfrak{M}$ von K.-Z.en aus $\mathfrak{R}$ auch nach XI* in $\mathfrak{R}$ eindeutig existiert; das folgt aber sofort aus Satz 5*, analog wie beim Beweise des Satzes 6, aus dem auch die Verträglichkeit des Axioms XI* mit IX folgt[30]).

Man kann unser Ergebnis auch so formulieren: *ist überhaupt eine Kontinuumhypothese, die*

$$2^{\aleph_\nu} > \aleph_\nu$$

fordert, mit unsern übrigen Axiomen verträglich, so ist es gewiß auch Axiom XI. Der Beweis des Satz 7 zeigt sogar, *daß XI mit den Axiomen I—X, XII verträglich ist, wenn der Satz 7, die Zermelosche Kardinalzahlungleichung es ist.*

Freiburg i. Br., den 19. Februar 1928.

---

[30]) Diese Betrachtungen zeigen auch, daß die Axiomensysteme I—XII und I—X, XI*, XII widerspruchsfrei sind, wenn nur die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllbar sind.

(Eingegangen am 21. Februar 1928.)

Neue zahlentheoretische Abschätzungen.

(Zweite Mitteilung.)

Von

J. G. van der Corput in Groningen.

Einleitung [1]).

Im letzten Jahrzehnt tritt in der analytischen Zahlentheorie öfters das folgende Problem auf: Ist $f(x)$ irgendeine für jedes ganze x im Intervall $a \leqq x < b$ (a und b ganz, $a < b$) definierte reelle Zahl, so wird für den Absolutwert des Mittelwertes

$$\underset{a \leqq x < b}{M} e^{2\pi i f(x)} = \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}$$

eine möglichst kleine obere Schranke gesucht. Oder allgemeiner: Bezeichnet P den m-dimensionalen Quader ($m \geqq 1$)

$$P \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

(a_μ und b_μ ganz, $a_\mu < b_\mu$), und ist die reelle Zahl $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ für jeden Gitterpunkt $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von P definiert, so suche man für den Absolutwert des Mittelwertes

$$\underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} = \frac{1}{(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)} \sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} \cdots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} e^{2\pi i f(x)}$$

eine möglichst kleine obere Schranke.

Zwar haben die verschiedenen Verfasser, die sich mit diesem Problem beschäftigt haben, in den Spezialfällen, denen sie begegnet sind, eine obere Schranke abgeleitet; aber ich glaube, daß es sich empfiehlt einen möglichst allgemeinen und zugleich möglichst scharfen Satz darüber zu publizieren. Darum leite ich in dieser Mitteilung einen Satz ab (Satz 2),

[1]) Erste Mitteilung: Mathematische Annalen 89 (1923), S. 215–254.

der nicht nur alle bis jetzt hierüber gefundene Resultate enthält, sondern sogar fast jede bisherige obere Schranke durch eine kleinere ersetzt.

Zum Beweise dieses Satzes brauche ich nicht nur verschiedene Hilfssätze, sondern auch noch einen Satz, der m. E. wichtig genug ist, um hier schon formuliert zu werden, da auch er vermutlich in diesem Gebiete noch eine bedeutende Rolle spielen wird.

Satz 1. *Es sei P der m-dimensionale Quader* $(m \geqq 1)$

$$P \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ ganz sind, und $a_\mu < b_\mu$ ist und es sei die reelle Funktion $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in jedem Gitterpunkt $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ von P definiert.

Es sei ϱ eine positive Zahl $\leqq b_1 - a_1 + 1$. Ist $\varrho \geqq 2$, dann bezeichne P_q für jedes positive ganze $q < \varrho$ den Quader

$$P_q \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - q; \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m),$$

und es werde dann gesetzt

$$f_q(x) = f(x_1 + q, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

für jeden Gitterpunkt (x) von P_q.

Dann ist

$$(1) \qquad \Big| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \Big| \leqq \sqrt{\frac{2}{\varrho}} + 2 \sqrt{\frac{1}{\varrho} \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big| \underset{(x) \prec P_q}{M} e^{2\pi i f_q(x)} \Big|},$$

und sogar

$$(2) \qquad \Big| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \Big| \leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\right)}$$

$$+ \frac{1}{\varrho} \sqrt{2\left(1 + \frac{\varrho-1}{b_1 - a_1}\right) \Big| \sum_{q=1}^{\varrho-1} \left(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\right)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x) \Big|}.$$

In dieser Arbeit bezeichnet

$$\underset{(x) \prec P}{M} \varphi(x)$$

den Mittelwert von $\varphi(x)$ in P, d. h. den Mittelwert

$$\frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_m - a_m)} \sum_{x_1 = a_1}^{b_1 - 1} \sum_{x_2 = a_2}^{b_2 - 1} \cdots \sum_{x_m = a_m}^{b_m - 1} \varphi(x).$$

Ist $\varrho = 1$, dann ist die Summe $\sum_{q=1}^{\varrho-1}$ leer, also Null, so daß dann die Schlußglieder in (1) und (2) verschwinden. Die Bedeutung von Satz 1 jedoch ist, daß bei großem $b_1 - a_1$ auch ϱ groß gewählt werden kann.

Dann ist das Glied $\sqrt{\frac{2}{\varrho}}$ klein, so daß die Aufgabe eine obere Schranke abzuleiten für den Absolutwert des Mittelwertes

$$\underset{(x)\prec P}{M}\, e^{2\pi i f(x)}$$

zurückgeführt ist zu der entsprechenden Aufgabe mit $f_q(x)$ statt $f(x)$, und in der Tat ist die letzte Aufgabe in vielen Fällen leichter zu lösen, als die ursprüngliche.

Obgleich die Ungleichungen (1) und (2) nicht bei Herrn H. Weyl vorkommen, verdanken wir ihm doch den Gedankengang des Beweises [2]).

Satz 1 brauche ich für den Beweis des folgenden Theorems, das den Hauptsatz dieser Mitteilung bildet.

Satz 2. *Es sei* m *ganz* $\geqq 1$, k_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *ganz* $\geqq 0$, $k_1 \geqq 2$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *definiert und reell in jedem Gitterpunkt* $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ *des* m*-dimensionalen Quaders*

$$P \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ *und* b_μ *ganz sind und*

$$a_\mu + k_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

ist, so daß die Funktion

$$g(x) = \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x)$$ [3])

in jedem Gitterpunkt (x) *des Quaders*

$$P_{(k)} \ldots a_u \leqq x_u < b_\mu - k_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

definiert ist. Es werde gesetzt

$$\varkappa_\mu = 2^{k_\mu + k_{\mu+1} + \ldots + k_m} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\omega = (b_1 - a_1)^{k_1} (b_2 - a_2)^{k_2} \ldots (b_m - a_m)^{k_m}$$

und

$$R = \Big| \underset{(x)\prec P_{(k)}}{M}\, g(x) \Big|. \tag{4}$$

Außerdem sei noch gegeben, daß $g(x)$ *im Quader* $P_{(k)}$ *entweder stets positiv oder stets negativ ist, und daß der Absolutwert von* $g(x)$ *in* $P_{(k)}$ *beständig* $\geqq r$ *ist, wo* r *eine positive von* (x) *unabhängige Zahl bezeichnet.*

---

[2]) Vgl. z. B. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen 77 (1916), S. 313–352, insbes. S. 328–329.

[3]) Die rechte Seite dieser Beziehung bedeutet

$$\sum_{h_1=0}^{k_1} \sum_{h_2=0}^{k_2} \cdots \sum_{h_m=0}^{k_m} (-1)^{k_1+\ldots+k_m-h_1-\ldots-h_m} \binom{k_1}{h_1} \ldots \binom{k_m}{h_m} f(x_1 + h_1, \ldots, x_m + h_m).$$

Dann ist

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{20}\Big|\sum\limits_{(x)\prec P} e^{2\pi i f(x)}\Big| \\ < \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-2}} + (r\omega)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum\limits_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}, \end{array} \right.$$

wo der Strich bezeichnet, daß in der letzten Summe nur diejenigen $\mu \geqq 2$ *und* $\leqq m$ *in Betracht kommen, für die* $\varkappa_\mu$ *größer als* 1 *ist.*

Von diesem Satz, dessen Beweis ich hier zum ersten Male veröffentliche, sind schon verschiedene (bis jetzt noch unbewiesene) Spezialfälle angewendet worden, und zwar

1. von mir beim Teilerproblem [4]);
2. von Herrn L. W. Nieland beim Kreisproblem [5]);
3. von mir in Anwendungen auf allgemeine Gitterpunktprobleme [6]);
4. von Herrn J. F. Koksma und mir, um die Größenordnung der Riemannschen Zeta-Funktion im kritischen Streifen abzuschätzen [7]).

Bald wird eine ausführliche Arbeit von mir erscheinen, in der Satz 2 auf die Diophantischen Ungleichungen angewendet wird [8]), und außerdem noch eine Arbeit von Herrn Nieland [9]).

Bei all diesen Problemen gibt Satz 2 schärfere Resultate als jede andere bis jetzt gefundene Abschätzung.

Der Spezialfall $m = 1$ von Satz 2 lautet folgendermaßen:

Satz 3. *Es sei* $k \geqq 2$, $\varkappa = 2^k$, $f(x)$ *für jedes ganze* x *ein Intervall* $a \leqq x < b$ (a *und* b *ganz,* $a < b - k$) *definiert und reell, so daß* $\Delta^k f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x < b - k$ *definiert ist.*

---

[4]) J. G. van der Corput, Zum Teilerproblem, Math. Annalen **98** (1928), S. 697–716. Ich beweise ebendort, daß das Restglied beim Teilerproblem $O\left(x^{\frac{27}{82}}(\log x)^{\frac{11}{41}}\right)$ ist.

[5]) L. W. Nieland, Zum Kreisproblem, Math. Annalen **98** (1928), S. 717–736. Es wird gezeigt, daß die Anzahl der Gitterpunkte der Kreisfläche mit Mittelpunkt O und Radius $\sqrt{x}$ gleich $\pi x + O\left(x^{\frac{27}{82}}\right)$ ist.

[6]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme (Zweite Mitteilung), Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 301–310.

[7]) J. G. van der Corput et J. F. Koksma, Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans la bande critique. Hier wird u. a. bewiesen, daß es eine absolute Konstante c gibt, derart, daß für $\sigma = 1 - \frac{g}{\gamma - 2}$ (g ganz $\geqq 3$, $\gamma = 2^g$) und $|t| \geqq 3$

$$|\zeta(\sigma + it)| < c\left\{\frac{|t|^{\frac{1}{\gamma-2}}}{g} + \frac{1}{\log\log|t|}\right\}\log|t|$$

ist.

[8]) J. G. van der Corput, Sur les inégalités Diophantiques.

[9]) L. W. Nieland, Zur Theorie der Gitterpunkte mit komplexen Gewichten.

Ist $\Delta^k f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x < b-k$ *entweder stets* $\geqq r$ *oder stets* $\leqq -r$, *wo* r *eine positive von* x *unabhängige Zahl bezeichnet, und wird*

$$R = \frac{1}{b-a-k}\left|\sum_{x=a}^{b-k-1} \Delta^k f(x)\right| \tag{6}$$

gesetzt, so ist

$$\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 20(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}} + \left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{7}$$

Mit Absicht rede ich hier von der Funktion $\Delta^k f(x)$ und nicht von der Funktion $f^{(k)}(x)$, da $f(x)$ nur für ganze x definiert zu sein braucht. Aber in vielen Anwendungen ist es bequemer, mit $f^{(k)}(x)$ statt mit $\Delta^k f(x)$ zu operieren, so daß es sich oft empfiehlt, an Stelle von Satz 3 den folgenden zu benutzen, der, wie ich sofort zeigen werde, unmittelbar aus Satz 3 folgt.

Satz 4. *Es sei* $a < b$, a *und* b *ganz,* k *ganz* $\geqq 2$, $\varkappa = 2^k$, $f(t)$ *im Intervall* $a \leqq t \leqq b$ *reell,* k*-mal differenzierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach innen),* $f^{(k)}(t)$ *stets* $\geqq r$ *oder stets* $\leqq -r$, *wo* r *eine von* t *unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann gilt, wenn*

$$R = \frac{1}{b-a}\left|f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right| \tag{8}$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| < 21(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}} + \left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{9}$$

Um die Sätze 2, 3 und 4 anzuwenden, ist es nicht nötig, die Zahl R mittels (4), (6) oder (8) genau zu berechnen, da die Behauptungen richtig bleiben, wenn darin R durch irgendeine Zahl $> R$ ersetzt wird. Ist also in Satz 2 für jeden Gitterpunkt x von P

$$|g(x)| \leqq R_1 \qquad (R_1 > 0 \text{ unabhängig von } x),$$

so darf in (5) R durch R_1 ersetzt werden; ist in Satz 3 für jedes ganze $x \geqq a$ und $< b-k$

$$|\Delta^k f(x)| \leqq R_1 \quad (R_1 > 0, \text{ unabhängig von } x),$$

dann darf man in (7) R durch R_1 ersetzen, und ist schließlich in Satz 4 im Intervalle $a \leqq t \leqq b$

$$|f^{(k)}(t)| \leqq R_1 \quad (R_1 > 0, \text{ unabhängig von } t),$$

so ist die Ersetzung von R durch R_1 in (9) erlaubt.

Es würde leicht sein, die in den Behauptungen der Sätze 2, 3 und 4 auftretenden Koeffizienten 20 und 21 zu verkleinern, aber darauf lege ich keinen Wert.

Daß Satz 4 aus Satz 3 folgt, geht so: Nach der Definition von R und r in Satz 4 ist $R \geqq r$, so daß die rechte Seite von (9) größer als $21(b-a)^{1-\frac{2}{\varkappa}}$ ist, und die linke Seite dieser Beziehung ist

$$\leqq b-a+1 \leqq 2(b-a),$$

so daß die Behauptung von Satz 4 trivial ist, falls $b-a \leqq 10^{\frac{1}{2}\varkappa}$ ist. Wir dürfen also $(b-a) > 10^{\frac{1}{2}\varkappa}$ voraussetzen, und dann ist wegen $\varkappa \geqq 4$

$$1 < \frac{1}{2}\cdot(b-a)^{1-\frac{2}{\varkappa}} < \frac{1}{2}(b-a)\cdot\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}} \tag{10}$$

und

$$\frac{b-a}{b-a-k} < \frac{1}{1-\frac{k}{10^{\frac{1}{2}\varkappa}}} \leqq \frac{1}{1-\frac{2}{10^2}} < \frac{41}{40}. \tag{11}$$

Wir können jetzt Satz 3 anwenden mit

$$R_1 = \frac{1}{b-a-k}\left|\sum_{x=a}^{b-k-1} \Delta^k f(x)\right|$$

statt R. Denn es ist $a < b-k$; $\Delta^k f(x)$ hat für jedes ganze x im Intervall $a \leqq x < b$ ein positives oder negatives Vorzeichen, je nachdem $f^{(k)}(t)$ im Intervall $a \leqq t \leqq b$ positiv oder negativ ist, und wegen $|f^{(k)}(t)| \geqq r$ ist auch $|\Delta^k f(x)| \geqq r$. Hiermit ist gezeigt, daß die Voraussetzungen von Satz 3 hier erfüllt sind.

Es ist

$$R_1 = \frac{1}{b-a-k}\left|\sum_{x=a}^{b-k-1}(\Delta^{k-1} f(x+1) - \Delta^{k-1} f(x))\right|$$

$$= \frac{1}{b-a-k}|\Delta^{k-1} f(b-k) - \Delta^{k-1} f(a)| \leqq \frac{1}{b-a-k}|f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)|,$$

(da $f^{(k-1)}(t)$ im Intervall $a \leqq t \leqq b$ monoton ist), also nach (8) und (11)

$$R_1 \leqq \frac{b-a}{b-a-k} R < \frac{41}{40} R,$$

also auch

$$R_1^{\frac{2}{\varkappa-2}} < \frac{41}{40} R^{\frac{2}{\varkappa-2}} \quad \text{und} \quad R_1^{\frac{2}{\varkappa}} < \frac{41}{40} R^{\frac{2}{\varkappa}}.$$

Satz 3, angewendet mit R_1 statt R, gibt mit Rücksicht auf (10)

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqq 1+\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

$$+20(b-a)\cdot\frac{41}{40}\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}+(r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}+\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$<21(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}+(r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}+\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

womit Satz 4 aus dem vorangehenden abgeleitet ist.

In meiner Gitterpunktarbeit [6]) habe ich einen Satz formuliert, der zwar große Ähnlichkeit mit Satz 4 hat, aber doch nicht genau denselben Wortlaut hat. Ich meine folgenden Satz:

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen vom Satz 4 gilt, wenn*

$$L=\frac{1}{r}\left|f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right| \tag{12}$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| < 100\,L\left\{r^{\frac{1}{\varkappa-2}}+r^{-\frac{2}{\varkappa}}L^{-\frac{2k}{\varkappa}}+L^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{13}$$ [10])

Man leitet Satz 5 in einigen Zeilen aus Satz 4 ab, und sogar mit dem Faktor 21 statt 100. Denn aus den Voraussetzungen von Satz 4 folgt $R \geqq r$, und nach (8) und (12) ist

$$b-a=\frac{rL}{R}.$$

Somit ist

$$(b-a)\cdot\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}=\frac{rL}{R}\cdot\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}=Lr^{\frac{1}{\varkappa-2}}\left(\frac{r}{R}\right)^{1-\frac{2}{\varkappa-2}}\leqq Lr^{\frac{1}{\varkappa-2}},$$

$$(b-a)\cdot(r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}=L^{1-\frac{2k}{\varkappa}}\cdot\frac{r}{R}\cdot\left(\frac{r^{k+1}}{R^k}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

$$=L^{1-\frac{2k}{\varkappa}}r^{-\frac{2}{\varkappa}}\left(\frac{r}{R}\right)^{1-\frac{2k}{\varkappa}}\leqq L^{1-\frac{2k}{\varkappa}}r^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

und

$$(b-a)\cdot\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\leqq L^{1-\frac{2}{\varkappa}}.$$

---

[10]) Man ersetze in Satz 2 der in Fußnote [6]) genannten Arbeit R durch $\frac{1}{r}$ und P durch L.

Hiermit ist Satz 5 aus Satz 4 abgeleitet.

Als ich meine Arbeit: Zum Teilerproblem [4]) schrieb, kannte ich weder Satz 4 noch Satz 5, aber ich hatte damals einen anderen Satz zu meiner Verfügung, der zwar weniger scharf war, doch reichlich für meine damaligen Zwecke hinreichte, nämlich

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 ist, wenn L durch (12) definiert wird,*

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| < cL\left\{r^{\frac{1}{\varkappa-2}} + r^{-\frac{4}{3\varkappa-4}} L^{-\frac{4k}{3\varkappa-4}} + L^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

wo c eine geeignet gewählte absolute Konstante bezeichnet [11]).

Hätte ich damals Satz 4 gekannt, dann würde ich ihn statt Satz 6 benutzt haben, da er bequemer ist. Aber es macht nicht viel aus, da diese zwei Sätze beim Teilerproblem dasselbe Endresultat liefern. Satz 6 folgt (mit $c = 100$) unmittelbar aus Satz 5, also aus Satz 4; denn ist $L^k r \geqq 1$, so ist

$$r^{-\frac{2}{\varkappa}} L^{-\frac{2k}{\varkappa}} \leqq r^{-\frac{4}{3k-4}} L^{-\frac{4k}{3\varkappa-4}} \text{ wegen } \frac{2}{\varkappa} \geqq \frac{4}{3\varkappa-4}$$

und sonst ist Satz 6 (sogar mit $c = 2$) trivial wegen

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqq b-a+1 \leqq 2(b-a) = 2\frac{rL}{R} \leqq 2L < 2L\cdot r^{-\frac{4}{3\varkappa-4}} L^{-\frac{4k}{3\varkappa-4}}.$$

Jetzt gehen wir über zu den Beweisen der Sätze 1 und 2; ich beweise zunächst Satz 1; dann den Spezialfall von Satz 2 mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 2$, und schließlich mittels des Prinzipes der vollständigen Induktion Satz 2 im Falle $k_1 + k_2 + \ldots + k_m > 2$.

Beweis von Satz 1.

Hilfssatz 1. Sind die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_N \geqq 0$ $(N \geqq 1)$, und ist H ganz $\geqq 1$, so ist

$$\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_N}{N}\right)^H \leqq \frac{u_1^H+u_2^H+\ldots+u_N^H}{N} \quad [12]). \tag{14}$$

[11]) Man ersetze in dem Satz, der auf den S. 699–700 der in Fußnote [4]) erwähnten Arbeit vorkommt, R durch $\frac{1}{r}$ und $\varkappa$ durch $\frac{1}{2}\varkappa$.

[12]) Die Voraussetzung daß H ganz ist, ist überflüssig, aber diese Bedingung ist in den Anwendungen erfüllt, und der Beweis ist bei ganzem $H \geqq 1$ einfacher als bei beliebigem $H \geqq 1$.

Beweis. Der Spezialfall $H=1$ ist evident. Es sei $H \geqq 2$, und es sei der Hilfssatz mit $H-1$ statt H schon bewiesen. Dann ist

$$\left(\frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\right)^H = \frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\cdot\left(\frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\right)^{H-1}$$
$$\leqq \frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\cdot\frac{u_1^{H-1}+\ldots+u_N^{H-1}}{N}$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_n u_m^{H-1}+u_m u_n^{H-1}}{2}.$$

Vom Produkte

$$(u_n-u_m)(u_n^{H-1}-u_m^{H-1})$$

sind entweder beide Faktoren $\geqq 0$, oder beide Faktoren <0, so daß

$$u_n u_m^{H-1}+u_m u_n^{H-1} \leqq u_n^H+u_m^H$$

ist, also

$$\left(\frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\right)^H \leqq \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_n^H+u_m^H}{2} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}u_n^H = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n^H,$$

womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. Es sei $t(x)=t(x_1,\ldots,x_m)$ in jedem Gitterpunkt $(x)=(x_1,\ldots,x_m)$ definiert, reell oder komplex, derart, daß $t(x)$ bei hinreichend großem $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|$ verschwindet.

Wird für jedes ganze $q \geqq 0$

$$t_q(x)=t(x_1+q,x_2,\ldots,x_m)$$

gesetzt und bezeichnet ϱ irgendeine positive ganze Zahl, dann ist

$$\sum_{(x)} t(x) = \frac{1}{\varrho}\sum_{(x)}\sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x), \tag{15}$$

falls die Summen $\sum_{(x)}$ erstreckt werden über die Koordinatensysteme aller Gitterpunkte $(x)=(x_1,\ldots,x_m)$ des m-dimensionalen Raumes.

Beweis. Die Anzahl der Summanden, die in den zwei Gliedern von (15) auftreten, ist endlich, da die Glieder $t(x)$ und $t_q(x)$ bei hinreichend großem $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|$ verschwinden. Setzt man

$$x_1+q=y_1, \quad x_2=y_2,\ldots,x_m=y_m, \quad (y_1,\ldots,y_m)=(y),$$

dann wird die rechte Seite von (15)

$$\frac{1}{\varrho}\sum_{(x)}\sum_{q=0}^{\varrho-1} t(y),$$

und dieser Ausdruck enthält jedes Glied $\frac{1}{\varrho}t(y)$ genau ϱ-mal, da jedem Gitterpunkte (y) genau ϱ Gitterpunkte $(x)=(y_1-q,\ y_2,\ \dots\ y_m)$ entsprechen. Die rechte Seite von (15) ist somit

$$\varrho\cdot\frac{1}{\varrho}\sum_{(y)}t(y)=\sum_{(x)}t(x).$$

Hilfssatz 3. Voraussetzungen: 1. Es sei $t(x)$ (reell oder komplex) in jedem Gitterpunkt $(x)=(x_1,\dots,x_m)$ des m-dimensionalen Quaders

$$P\dots a_\mu\leqq x_\mu<b_\mu \qquad (\mu=1,2,\dots,m)$$

(a_μ und b_μ ganz, $a_\mu<b_\mu$) definiert.

2. ϱ sei eine positive ganze Zahl $\leqq b_1-a_1+1$.

3. Ist $\varrho\geqq 2$, so bezeichne P_q für jede positive ganze Zahl $q<\varrho$ den Quader

$$P_q\dots a_1\leqq x<b_1-q;\quad a_\mu\leqq x_\mu<b_\mu \qquad (\mu=2,3,\dots,m)$$

und es werde gesetzt

$$t_q(x)=t(x_1+q,\ x_2,\dots,x_m)$$

für jeden Gitterpunkt (x) von P_q. Schließlich bezeichne noch $\bar{t}_q(x)$ die konjugiert-komplexe Zahl von $t_q(x)$.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\sqrt{\frac{2}{\varrho}\underset{(x)\prec P}{M}|t(x)|^2}+2\sqrt{\frac{1}{\varrho}\sum_{q=1}^{\varrho-1}\Big|\underset{(x)\prec P_q}{M}t(x)\,\bar{t}_q(x)\Big|},$$

und sogar

$$\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\sqrt{\frac{1}{\varrho}\Big(1+\frac{\varrho-1}{b_1-a_1}\Big)\underset{(x)\prec P}{M}|t(x)|^2}$$

$$+\frac{1}{\varrho}\sqrt{\Big(1+\frac{\varrho-1}{b_1-a_1}\Big)\Big|\sum_{q=1}^{\varrho-1}\Big(1-\frac{q}{b_1-a_1}\Big)\Big(1-\frac{q}{b_1-a_1}\Big)(\varrho-q)\underset{(x)\prec P_q}{M}(\bar{t}_q(x)t(x)+t_q(x)\bar{t}(x)}\tag{16}$$

Vorbemerkung. Setzt man

$$t(x)=e^{2\pi i f(x)},$$

so verwandelt sich dieser Hilfssatz in Satz 1.

Beweis. Es werde $t(x)=0$ gesetzt in allen Gitterpunkten (x) außerhalb P. Nach dem vorigen Hilfssatz ist dann

$$\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_m-a_m)}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|.\tag{17}$$

In der Summe $\sum_{(x)}$ kommen hier nur diejenigen Gitterpunkte $(x)=(x_1,\ldots,x_m)$ in Betracht, für die

$$a_1-(\varrho-1)\leqq x_1<b_1;\qquad a_\mu\leqq x_\mu\leqq b_\mu\qquad(\mu=2,3,\ldots,m)$$

ist, da für die übrigen Gitterpunkte $t_q(x)$ verschwindet. Die Anzahl N der Glieder dieser Summe $\sum_{(x)}$ ist also

$$N\leqq(b_1-a_1+(\varrho-1))(b_2-a_2)\ldots(b_m-a_m). \tag{18}$$

Schreibt man nun (17) in der Gestalt

$$\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{N}{(b_1-a_1)\ldots(b_m-a_m)}\cdot\frac{1}{N}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|,$$

und wendet man die Ungleichung

$$\frac{1}{N}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|\leqq\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|^2}$$

an, die aus Hilfssatz 1 mit $H=2$ folgt, dann bekommt man

$$\left\{\begin{aligned}&\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{N}{(b_1-a_1)\ldots(b_m-a_m)}\cdot\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|^2}\\&\leqq\frac{1}{\varrho}\sqrt{\Big(1+\frac{\varrho-1}{b_1-a_1}\Big)\cdot\frac{1}{(b_1-a_1)\ldots(b_m-a_m)}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|^2}\end{aligned}\right. \tag{19}$$

wegen (18).

Das Quadrat des Absolutwertes einer komplexen Zahl ist gleich dieser Zahl mal der konjugiert-komplexen Zahl, somit

$$\left\{\begin{aligned}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|^2&=\sum_{r=0}^{\varrho-1}\bar{t}_r(x)\cdot\sum_{s=0}^{\varrho-1}t_s(x)\\&=\sum_{r=0}^{\varrho-1}\sum_{\substack{s=0\\s=r}}^{\varrho-1}+\sum_{r=0}^{\varrho-1}\sum_{\substack{s=0\\s<r}}^{\varrho-1}+\sum_{r=0}^{\varrho-1}\sum_{\substack{s=0\\s>r}}^{\varrho-1}\bar{t}_r(x)\cdot t_s(x).\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Hierin ist

$$\sum_{r=0}^{\varrho-1}\sum_{\substack{s=0\\s=r}}^{\varrho-1}\bar{t}_r(x)\,t_s(x)=\sum_{r=0}^{\varrho-1}|t_r(x)|^2,$$

also nach Hilfssatz 2 mit $|t(x)|^2$ statt $t(x)$

$$\left\{\begin{aligned}\sum_{(x)}\sum_{r=0}^{\varrho-1}\sum_{\substack{s=0\\s=r}}^{\varrho-1}t_r(x)\,t_s(x)&=\sum_{(x)}\sum_{r=0}^{\varrho-1}|t_r(x)|^2=\varrho\sum_{(x)}|t(x)|^2\\&=\varrho(b_1-a_1)\ldots(b_m-a_m)\underset{(x)\prec P}{M}|t(x)|^2,\end{aligned}\right. \tag{21}$$

da $|t(x)|^2$ außerhalb P verschwindet.

Setzt man $r = s + q$, so findet man

$$\sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s<r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x)\, t_s(x) = \sum_{q=1}^{\varrho-1} \sum_{s=0}^{\varrho-1-q} \bar{t}_{s+q}(x) \cdot t_s(x),$$

und wendet man nun wiederum Hilfssatz 2 an, aber jetzt mit $\varrho - q$ statt ϱ, und mit $\bar{t}_q(x) \cdot t(x)$ statt $t(x)$, so erhält man

$$(22) \qquad \sum_{(x)} \sum_{s=0}^{\varrho-1-q} \bar{t}_{s+q}(x) \cdot t_s(x) = (\varrho - q) \sum_{(x)} \bar{t}_q(x) \cdot t(x).$$

Die letzte Summe braucht nur erstreckt zu werden über die Koordinatensysteme der Gitterpunkte (x) von P_q, da für die übrigen Gitterpunkte (x) wenigstens einer der Faktoren $\bar{t}_q(x)$ und $t(x)$ verschwindet. Hieraus folgt, daß die rechte Seite von (22) den Wert

$$(\varrho - q)(b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big) \underset{(x) \prec P_q}{M} \bar{t}_q(x)\, t(x)$$

hat, also

$$(23) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(x)} \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s<r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x) \cdot t_s(x) \\ \displaystyle = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \bar{t}_q(x)\, t(x). \end{cases}$$

Durch Vertauschung von r und s und von i und $-i$ findet man hieraus

$$(24) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(x)} \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s>r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x)\, t_s(x) \\ \displaystyle = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} t_q(x)\, \bar{t}(x). \end{cases}$$

Aus (19), (20), (21), (23) und (24) folgt

$$\Big| \underset{(x) \prec P}{M} t(x) \Big|$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}\Big(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\Big) \underset{(x) \prec P}{M} |t(x)|^2 + \frac{1}{\varrho^2}\Big(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\Big) \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} (\bar{t}_q(x)\, t(x) + t_q(x)\, \bar{t}}$$

und diese Ungleichung liefert unmittelbar die verlangte Beziehung, da die Quadratwurzel aus einer Summe von zwei Gliedern, die $\geqq 0$ sind, höchstens gleich der Summe der Quadratwurzel aus diesen zwei Gliedern ist.

Hiermit ist Hilfssatz 3, also Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 2, falls $k_1 + \ldots + k_m = 2$ ist[13]).

Hilfssatz 4. Es sei $a < b$, $f(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ reell, differenzierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach innen), und es sei für $a \leqq u_1 < u_2 \leqq b$

$$(25) \qquad \frac{f'(u_2) - f'(u_1)}{u_2 - u_1} \text{ stets } \geqq r \quad \text{oder} \quad \text{stets } \leqq -r,$$

wo r eine positive, von u_1, u_2 unabhängige Zahl bezeichnet.

Behauptungen: 1. Sind $a - \frac{1}{2}$ und $b - \frac{1}{2}$ ganz, und ist $r \leqq 1$, dann ist

$$(26) \qquad \left| \sum_{\substack{a<n<b \\ n \text{ ganz}}} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}.$$

2. Sind a und b ganz (r beliebig positiv), dann ist

$$(27) \qquad \left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 5 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}.$$

Beweis. Die erste Behauptung ist schon vorher bewiesen worden[14]), und der Beweis der zweiten Behauptung geht so:

Ist $r > \frac{1}{4}$, so ist wegen (25)

$$\frac{1}{\sqrt{r}} |f'(b) - f'(a)| \geqq \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot r(b-a) \geqq \frac{1}{2}(b-a),$$

also die rechte Seite von (27) größer als $2(b-a)$, und die linke Seite von (27) ist höchstens $b - a + 1 \leqq 2(b-a)$, so daß die zweite Behauptung dann evident ist. Wir dürfen also $r \leqq \frac{1}{4}$ annehmen. Ist $b - a \leqq 9$, dann ist die linke Seite von (27) höchstens 10, und die rechte Seite ist größer als $\frac{5}{\sqrt{r}} \geqq 10$, so daß wir außerdem noch $b - a \geqq 10$ voraussetzen dürfen.

Nach der ersten Behauptung dieses Hilfssatzes ist

$$\left| \sum_{\substack{a+\frac{1}{2}<n<b-\frac{1}{2} \\ n \text{ ganz}}} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \frac{\left| f'\left(b - \frac{1}{2}\right) - f'\left(a + \frac{1}{2}\right) \right| + 1}{\sqrt{r}} < 4 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}$$

(da $f'(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ beständig zu- oder beständig abnimmt), also

$$\left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leqq 2 + \left| \sum_{\substack{a+\frac{1}{2}<n<b-\frac{1}{2} \\ n \text{ ganz}}} e^{2\pi i f(n)} \right|$$

$$< \frac{1}{\sqrt{r}} + 4 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}} < 5 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}.$$

---

[13]) (Zusatz bei der Korrektur.) Die in der Fußnote [9]) erwähnte Arbeit enthält eine Vereinfachung dieses Beweises.

[14]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen **84** (1921), S. 53—79.

Hilfssatz 5. Ist $y = \varphi(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ die Gleichung eines Parabelbogens, der keine vertikale Tangente besitzt, so ist $\varphi'''(x)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ entweder stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$.

Beweis. Es sei

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (\alpha \leqq y \leqq \beta)$$

mit

$$AC - B^2 = 0 \tag{28}$$

die Gleichung des Parabelbogens. Setzen wir

$$Bx + Cy + E = u,$$

dann ist

$$Ax + By + D + uy' = 0, \tag{29}$$

$$A + 2By' + Cy'^2 + uy'' = 0, \tag{30}$$

$$3(B + Cy')y'' + uy''' = 0. \tag{31}$$

Wegen (29) und (28) ist

$$u(B + Cy') = B(Bx + Cy + E) - C(Ax + By + D) = BE - CD,$$

so daß aus (31) und (30) folgt

$$\left\{\begin{aligned} u^3y''' &= -3(B + Cy')u^2y'' = 3(B + Cy')u(A + 2By' + Cy'^2) \\ &= 3(BE - CD)(A + 2By' + Cy'^2), \end{aligned}\right. \tag{32}$$

somit wegen (28)

$$Au^3y''' = 3(BE - CD)(A + By')^2 \tag{33}$$

und

$$Cu^3y''' = 3(BE - CD)(B + Cy')^2. \tag{34}$$

Wir unterscheiden jetzt verschiedene Fälle.

1. Es sei $A = C = 0$. Dann ist $B \neq 0$ wegen (28), und der Parabelbogen ist das Segment einer nicht-vertikalen Gerade, so daß y''' identisch verschwindet.

2. Es sei $C = 0$, $A \neq 0$. Nach (28) ist dann $B = 0$. Der Koeffizient E ist ungleich Null, da sonst die Gleichung der Parabel y nicht enthalten würde. Dann ist $u = E \neq 0$, so daß nach (33) y''' identisch Null ist.

3. Es sei $C \neq 0$, und es verschwinde $u = Bx + Cy + E$ in wenigstens einem Punkte (ξ, η) des Parabelbogens. Da in diesem Punkte y' endlich ist, ist nach (29)

$$A\xi + B\eta + D = 0,$$

also

$$BE - CD = B(B\xi + C\eta + E) - C(A\xi + B\eta + D) = 0,$$

so daß die Parabelgleichung geschrieben werden kann in der Gestalt

$$(Bx + Cy)^2 + 2E(Bx + Cy) + CF = 0.$$

Dann besteht der Parabelbogen aus dem Segment einer Geraden mit der Gleichung $Bx + Cy = \text{konst.}$, so daß wegen $C \neq 0$ in jedem Punkte $y''' = 0$ ist.

4. Es sei $C \neq 0$, und es sei in jedem Punkte des Parabelbogens $u \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich, daß dann u beständig positiv oder beständig negativ ist, so daß nach (34) y''' stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$ ist.

Hilfssatz 6. Bezeichnen p und q beliebig gegebene positive Zahlen, dann kann man eine Funktion $\varphi(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ so definieren, daß sie in diesem Intervalle zweimal differenzierbar ist (in den Endpunkten eventuell nur nach innen), derart, daß

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \qquad \varphi'(0) = p, \qquad \varphi'(1) = -q \tag{35}$$

und

$$\varphi''(u) \leqq \operatorname{Max}\left(-\tfrac{1}{2}p, -\tfrac{1}{2}q\right) \qquad (0 \leqq u \leqq 1) \tag{36}$$

ist.

Beweis. Es ist möglich durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ eine Parabel

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

zu legen, die im Punkte $(0, 0)$ die Gerade $y = px$, im Punkte $(1, 0)$ die Gerade $y = -q(x - 1)$ berührt. Denn die (notwendigen und) hinreichenden Bedingungen dafür sind

$$AC - B^2 = 0; \qquad F = 0; \qquad A + 2D = 0; \qquad D + pE = 0;$$
$$A + D - (B + E)q = 0,$$

so daß wir, wenn $E = 1$ gesetzt wird, sukzessive D, A, B, C so bestimmen können, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Man findet dann

$$D = -p, \qquad A = 2p,$$
$$A + Bp = p + (B + E)p = p + \frac{A + D}{q}p = p + \frac{p}{q}p = \frac{p(p+q)}{q}.$$

Wir schreiben jetzt die Gleichung des Parabelbogens in der Gestalt $y = \varphi(x)$, so daß jedenfalls (35) gilt. Setzt man in (30) $x = y = 0$, $u = E = 1$, $y' = p$, so findet man

$$\varphi''(0) = -(A + 2Bp + Cp^2) = -\frac{1}{A}(A + Bp)^2$$
$$= -\frac{p}{2q^2}(p + q)^2 \leqq -\frac{1}{2}p.$$

Vertauscht man hierin p und q, und ersetzt man zu gleicher Zeit u durch $1-u$, so bekommt man

$$\varphi''(1) \leqq -\frac{1}{2}q,$$

und da nach dem vorigen Hilfssatz $\varphi''(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ monoton ist, gilt auch (36).

Hilfssatz 7. Sind fünf Zahlen x, A, B, A', B' gegeben mit den Eigenschaften

$$x \text{ ganz}, \qquad A' < B - A < B',$$

dann ist es möglich, im Intervall $x \leqq u \leqq x+1$ eine reelle (in den Endpunkten eventuell nur nach innen) differenzierbare Funktion $f(u)$ zu bekommen, derart, daß

$$f(x) = A, \quad f(x+1) = B, \quad f'(x) = A', \quad f'(x+1) = B'$$

und für $x \leqq u_1 < u_2 \leqq x+1$

$$\frac{f'(u_2) - f'(u_1)}{u_2 - u_1} \geqq \frac{1}{2}\operatorname{Min}\left(B' - (B-A), (B-A) - A'\right) \tag{37}$$

ist.

Beweis. Ich setze

$$f(u) = A + (B-A)(u-x) - \varphi(u-x),$$

wo $\varphi(u)$ die Funktion des vorigen Hilfssatzes bezeichnet, und zwar mit

$$p = (B-A) - A', \qquad q = B' - (B-A).$$

Diese Funktion $f(u)$ hat die verlangten Eigenschaften; denn es ist

$$f(x) = A - \varphi(0) = A; \qquad f(x+1) = A + (B-A) - \varphi(1) = B;$$
$$f'(x) = B - A - \varphi'(0) = B - A - \{(B-A) - A'\} = A';$$
$$f'(x+1) = B - A - \varphi'(1) = B - A + \{B' - (B-A)\} = B';$$

$f''(u) = -\varphi''(u-x)$ ist mindestens gleich der kleinsten der Zahlen $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}q$, so daß für $x \leqq u_1 < u_2 \leqq x+1$

$$\frac{f'(u_2) - f'(u_1)}{u_1 - u_2} \geqq \frac{1}{2}\operatorname{Min}(p, q) = \frac{1}{2}\operatorname{Min}\left(B' - (B-A), (B-A) - A'\right)$$

ist.

Hiermit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 8. Sind a und b ganz $(a+2 < b)$, ist $f(x)$ für jedes ganze $x \geqq a$ und $< b$ definiert, und zwar so, daß $\Delta^2 f(x)$ im Intervall $a \leqq x < b-2$ stets $\geqq r$ oder stets $\leqq -r$ ist, wo r eine positive von x unabhängige Zahl bezeichnet, so ist

$$\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 11\,\frac{|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| + 1}{\sqrt{r}}. \tag{38}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich im Intervall $a \leqq x < b-2$ $\Delta^2 f(x) \geqq r$ voraussetzen, da ich sonst nur $f(x)$ durch $-f(x)$ zu ersetzen brauche. Die rechte Seite von (38) ist dann

$$\frac{11}{\sqrt{r}} \sum_{x=a}^{b-3} (\Delta f(x+1) - \Delta f(x)) + \frac{11}{\sqrt{r}} = \frac{11}{\sqrt{r}} \sum_{x=a}^{b-3} \Delta^2 f(x) + \frac{11}{\sqrt{r}}$$

$$> \frac{11}{\sqrt{r}} \cdot (b-a-2) \cdot r = 11\,(b-a-2)\sqrt{r}$$

und die linke Seite von (38) ist $\leqq b-a \leqq 3\,(b-a-2)$, so daß die Behauptung evident ist im Falle $\sqrt{r} \geqq \frac{3}{11}$. Wir dürfen also

$$r < \frac{9}{121} \tag{39}$$

annehmen.

Ich definiere nun die Funktion $f(x)$, die bis jetzt nur in den ganzzahligen $x \geqq a$ und $< b$ definiert worden ist, auch für die Zahlen $a-1$ und b, und zwar folgendermaßen

$$f(b) = 2f(b-1) - f(b-2) + r,$$
$$f(a-1) = 2f(a) - f(a+1) + r,$$

so daß die Ungleichung

$$\Delta^2 f(x) \geqq r$$

auch in den Punkten $x = a-1$ und $x = b-2$ gilt.

Für jedes ganze $x \geqq a$ und $\leqq b-2$ setze ich

$$\begin{cases} f(x) = A, \quad f(x+1) = B, \\ \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = A', \quad \frac{1}{2}(f(x+2) - f(x)) = B', \end{cases} \tag{40}$$

so daß die Zahlen A, B, A', B' von x abhängen. Dann ist

$$\begin{cases} B' - (B-A) = \frac{1}{2}\{f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\} \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\Delta^2 f(x) \geqq \frac{1}{2} r > 0, \\ (B-A) - A' = \frac{1}{2}\{f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)\} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x-1) \geqq \frac{1}{2} r > 0, \end{cases} \tag{41}$$

also

$$A' < B - A < B',$$

so daß es nach dem vorigen Hilfssatz im Intervall $x \leqq u \leqq x+1$ eine (in den Endpunkten eventuell nur nach innen) differenzierbare Funktion $f(u)$ gibt, derart, daß

$$f(x) = A, \quad f(x+1) = B, \quad f'(x) = A', \quad f'(x+1) = B' \tag{42}$$

ist und für $x \leqq u_1 < u_2 \leqq x+1$ Ungleichung (37) gilt. Die Bezeichnung $f(u)$ ist erlaubt, da diese Funktion wegen (40) und (42) in den ganzzahligen Punkten x denselben Wert hat wie die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Die Funktion $f(u)$ ist dann im ganzen Intervall $a \leqq u \leqq b-1$, auch in den ganzzahligen Punkten x differenzierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach innen), da im Punkt x (x ganz, $a < x < b-1$) die Derivierten nach links und nach rechts wegen (42) und (40) denselben Wert haben, nämlich den Wert $\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1))$.

Wählen wir zwei beliebige Punkte v_1 und v_2 mit der Eigenschaft $a \leqq v_1 < v_2 \leqq b-1$, und bezeichnen $g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}$ die wachsend geordneten Zahlen $> v_1$ und $< v_2$ (wenn es solche nicht gibt, sei $N=1$), und nennen wir $v_1 = g_0$, $v_2 = g_N$, dann ist nach (37) und (41)

$$f'(g_h) - f'(g_{h-1}) \geqq \frac{1}{4} r (g_h - g_{h-1}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N),$$

woraus sich durch Summation ergibt, daß die Ungleichung

$$\frac{f'(v_2) - f'(v_1)}{v_2 - v_1} \geqq \frac{1}{4} r$$

gilt für jedes Zahlenpaar v_1, v_2 mit der Eigenschaft $a \leqq v_1 < v_2 \leqq b-1$. Wir können also die zweite Behauptung von Hilfssatz 4 mit $\frac{1}{4}r$ statt r, und mit $b-1$ statt b anwenden, so daß wir finden

$$\left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5 \frac{f'(b-1) - f'(a) + 1}{\frac{1}{2}\sqrt{r}}.$$

Hierin ist wegen (42) und (40)

$$f'(a) = \tfrac{1}{2}(f(a+1) - f(a-1)) = f(a+1) - f(a) - \tfrac{1}{2} r = \Delta f(a) - \tfrac{1}{2} r,$$

$$f'(b-1) = \tfrac{1}{2}(f(b) - f(b-2)) = f(b-1) - f(b-2) + \tfrac{1}{2} r$$
$$= \Delta f(b-2) + \tfrac{1}{2} r,$$

$$f'(b-1) - f'(a) = \Delta f(b-2) - \Delta f(a) + r < \Delta f(b-2) - \Delta f(a) + \tfrac{1}{10},$$

wegen (39), also

$$\left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < 10 \frac{\Delta f(b-2) - \Delta f(a) + \frac{1}{10} + 1}{\sqrt{r}} < 11 \frac{\Delta f(b-2) - \Delta f(a) + 1}{\sqrt{r}}.$$

Beweis von Satz 2, falls

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 2$$

ist. Dann ist

$$k_1 = 2, \quad k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad \varkappa_1 = 4.$$

Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei $m = 1$. Dann ist Satz 3 zu beweisen, und zwar im Spezialfall $k = 2$. Nach (6) ist

$$|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| = \left|\sum_{x=a}^{b-3} \Delta^2 f(x)\right| = (b-a-2)R < (b-a)R,$$

also

$$\frac{1}{b-a} \cdot \frac{|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)|}{\sqrt{r}} < \frac{R}{\sqrt{r}} = \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}.$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} = (r(b-a)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}.$$

Nach dem vorigen Hilfssatz ist somit

$$\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 11(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b-a)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

so daß Satz 3, falls $k = 2$ ist, gilt, sogar mit dem Koeffizienten 11 statt 20 in der Behauptung.

2. Es sei $m \geqq 2$. Zu jedem System von ganzen Zahlen $x_2, x_3, \ldots, x_m$, die die Ungleichungen

$$a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

erfüllen, setze ich

$$R_1(x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{b_1 - a_1}\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} \Delta^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\right|.$$

Genau wie in 1. beweist man

$$\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} e^{2\pi i f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\right| < 11(b_1-a_1)\left\{\left(\frac{r}{R_1^2(x_2, \ldots, x_m)}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b_1-a_1)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

also

$$\left|\sum_{(x) \prec P} e^{2\pi i f(x)}\right| < 11\left\{r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} Q + (r(b_1-a_1)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}, \tag{43}$$

wo

$$Q = \frac{1}{(b_2-a_2)\ldots(b_m-a_m)} \sum_{x_2=a_2}^{b_2-1} \cdots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} (R_1(x_2, \ldots, x_m))^{\frac{2}{\varkappa-2}}$$

gesetzt ist. Nach Hilfssatz 1 mit

$$N = (b_2-a_2)(b_3-a_3)\ldots(b_m-a_m), \qquad u_n = (R_1(x_2, \ldots, x_m))^{\frac{2}{\varkappa-2}},$$

$$H = \frac{\varkappa-2}{2} \quad (\text{also ganz} \geqq 1),$$

ist

$$Q^{\frac{\varkappa-2}{2}} \leqq \frac{1}{(b_2 - a_2)\dots(b_m - a_m)} \sum_{x_2=a_2}^{b_2-1} \dots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} R_1(x_2, \dots, x_m)$$

$$= \frac{1}{(b_1 - a_1)\dots(b_m - a_m)} \left| \sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} \sum_{x_2=a_2}^{b_2-1} \dots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} \Delta^2 f(x) \right|,$$

da $\Delta^2 f(x)$ beständig $\geqq 0$ oder beständig $\leqq 0$ ist, also

$$Q^{\frac{\varkappa-2}{2}} \leqq R.$$

Aus (43) folgt somit

$$\left| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| < 11 \left\{ \left(\frac{r}{R^2} \right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b_1 - a_1)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}} \right\}.$$

Hiermit ist der Spezialfall von Satz 2 mit $k_1 + k_2 + \dots + k_m = 2$ vollständig bewiesen, sogar mit dem Koeffizienten 11 statt 20.

Beweis von Satz 2, falls $k_1 + \dots + k_m > 2$ ist.

Hilfssatz 9. Erfüllen die positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\tau, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\tau$ $(\tau \geqq 1)$ die Ungleichung

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} \geqq 1; \tag{44}$$

so ist für jedes System von Zahlen $\omega_\sigma \geqq 1$ $(\sigma = 1, 2, \dots, \tau)$

$$\omega_1^{-\alpha_1} \cdot \omega_2^{-\alpha_2} \dots \omega_\tau^{-\alpha_\tau} \leqq \omega_1^{-\beta_1} + \omega_2^{-\beta_2} + \dots + \omega_\tau^{-\beta_\tau}. \tag{45}$$

Beweis. Gäbe es ein System von Zahlen $\omega_\sigma \geqq 1$ mit der Eigenschaft

$$\omega_1^{-\alpha_1} \cdot \omega_2^{-\alpha_2} \dots \omega_\tau^{-\alpha_\tau} > \omega_1^{-\beta_1} + \omega_2^{-\beta_2} + \dots + \omega_\tau^{-\beta_\tau}$$

dann wäre, wenn

$$\omega_\sigma = \omega_1^{\lambda_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, \tau)$$

gesetzt wird,

$$\omega_1^{-(\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau)} > \omega_1^{-\beta_\sigma\lambda_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, \tau),$$

somit wegen $\omega_1 \geqq 1$

$$\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau < \beta_\sigma\lambda_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, \tau).$$

Hieraus würde folgen

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} < \frac{1}{\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau} (\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau) = 1,$$

was in Widerspruch mit (44) ist.

Hilfssatz 10. Sind die Zahlen $k_2, k_3, \dots, k_\tau$ ganz und $\geqq 0$ $(\tau \geqq 2)$, und wird

$$\varkappa_\sigma = 2^{k_\sigma + k_{\sigma+1} + \dots + k_\tau} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq \tau)$$

gesetzt, dann ist

$$k_2\varkappa_2 + k_3\varkappa_3 + \dots + k_\tau\varkappa_\tau \geqq 2\varkappa_2 - 4 + \varkappa_\tau. \tag{46}$$

Beweis. Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Es sei $\tau = 2$. Dann soll bewiesen werden

$$(k_2 - 3)\varkappa_2 + 4 \geqq 0. \tag{47}$$

Ist $k_2 = 0$, so ist $\varkappa_2 = 1$, und die linke Seite von (47) $-3 \cdot 1 + 4 > 0$;
„ $k_2 = 1$, „ „ $\varkappa_2 = 2$, „ „ „ „ „ „ $-2 \cdot 2 + 4 = 0$;
„ $k_2 = 2$, „ „ $\varkappa_2 = 4$, „ „ „ „ „ „ $-1 \cdot 4 + 4 = 0$;
„ $k_2 \geqq 3$, „ „ „ „ „ „ „ $\geqq 4$.

2. Es sei $\tau \geqq 3$, und es sei der Hilfssatz mit $\tau - 1$ statt τ schon bewiesen. Dann können wir $k_\tau > 0$ voraussetzen, da die Behauptung mit $k_\tau = 0$ äquivalent ist mit der Behauptung, die man bekommt, wenn man τ durch $\tau - 1$ ersetzt.

2.1. Es sei $k_2 \geqq 2$. Dann ist die linke Seite von (46) $\geqq 2\varkappa_2 + \varkappa_\tau > 2\varkappa_2 - 4 + \varkappa_\tau$.

2.2. Es sei $k_2 = 1$. Da (46) mit $\tau - 1$ statt τ schon bewiesen ist, ist

$$k_3\varkappa_3 + \ldots + k_\tau\varkappa_\tau \geqq 2\varkappa_3 - 4 + \varkappa_\tau. \tag{48}$$

Vermehrt man beide Seiten dieser Ungleichung mit

$$k_2\varkappa_2 = 1 \cdot 2\varkappa_3 = 2\varkappa_2 - 2\varkappa_3,$$

so erhält man genau die Behauptung (46).

2.3. Es sei $k_2 = 0$. Jetzt gilt wiederum (48), und vermehrt man nun beide Seiten dieser Ungleichung mit

$$k_2\varkappa_2 = 0 = 2\varkappa_2 - 2\varkappa_3,$$

so findet man auch in diesem Falle die Richtigkeit von (46).

Hilfssatz 11. Sind die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$ ganz und $\geqq 0$ $(\tau \geqq 2)$, ist $k_1 \geqq 2$ und wird

$$\varkappa_\sigma = 2^{k_\sigma + k_{\sigma+1} + \ldots + k_\tau} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq \tau)$$

gesetzt, so ist

$$k_1\varkappa_1 + 2k_2\varkappa_2 + \ldots + 2k_{\tau-1}\varkappa_{\tau-1} + 2(k_\tau - 1)\varkappa_\tau \geqq 3\varkappa_1 - 8. \tag{49}$$

Beweis. Ich unterscheide verschiedene Fälle.

Ist $k_1 \geqq 3$, $k_\tau \geqq 1$, so ist die linke Seite von (49) $\geqq 3\varkappa_1 > 3\varkappa_1 - 8$;
„ $k_1 \geqq 3$, $k_\tau = 0$, „ „ „ „ „ „ (49) $\geqq 3\varkappa_1 - 2 > 3\varkappa_1 - 8$;
„ $k_1 = 2$, „ „ „ „ „ „ (49)

nach dem vorigen Hilfssatz

$$\geqq 2\varkappa_1 + 2(2\varkappa_2 - 4 + \varkappa_\tau) - 2\varkappa_\tau = 3\varkappa_1 - 8,$$

womit Hilfssatz 11 bewiesen ist.

Hilfssatz 12. Sind die Zahlen $\omega_\sigma \geqq 1$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, \tau;\ \tau \geqq 2)$, bezeichnen $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$ ganze Zahlen $\geqq 0$, ist $k_1 \geqq 2$, und wird

$$\varkappa_\sigma = 2^{k_\sigma + k_{\sigma+1} + \ldots + k_\tau} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq \tau)$$

gesetzt, so ist

$$(\omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \ldots \omega_{\tau-1}^{k_{\tau-1}} \omega_\tau^{k_\tau - 1})^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}} \leqq \omega_1^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\sigma=2}^{\tau} \omega_\sigma^{-\frac{1}{\varkappa_\sigma}}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 9 ist eine hinreichende Bedingung

$$\frac{\frac{2k_1}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{2}{\varkappa_1}} + \frac{\frac{2k_2}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{1}{\varkappa_2}} + \ldots + \frac{\frac{2k_{\tau-1}}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{1}{\varkappa_{\tau-1}}} + \frac{\frac{2(k_\tau - 1)}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{1}{\varkappa_\tau}} \geqq 1,$$

und nach dem vorigen Hilfssatz ist diese Bedingung in der Tat erfüllt.

Beweis von Satz 2, falls

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m > 2$$

ist. Ich nehme an, daß Satz 2 schon bewiesen ist, wenn das System $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ersetzt wird durch ein System von ganzen Zahlen $k_1', k_2', \ldots, k_m'$, wobei die Beziehungen

$$k_1' \geqq 2, \qquad k_\mu' \geqq 0, \qquad k_1' + k_2' + \ldots + k_m' = k_1 + k_2 + \ldots + k_m - 1$$

gelten.

Es sei τ die größte ganze Zahl $\leqq m$, für die k_τ positiv ist.

Untersuchen wir zunächst den Fall

$$k_\tau \geqq \frac{1}{20^2}(b_\tau - a_\tau). \tag{50}$$

Ist $\tau = 1$, also

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad k_1 \geqq 3, \qquad \varkappa_1 = 2^{k_1} \geqq 8,$$

dann ist, da nach der Definition (4) von R

$$R \geqq r$$

ist,

$$\left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \geqq (b_1 - a_1)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \geqq (20^2 k_1)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \geqq (20^2 \cdot 3)^{-\frac{2}{8}} \geqq \frac{1}{20},$$

und ist $\tau \geqq 2$, dann ist

$$(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\varkappa_\tau}} \geqq (20^2 k_\tau)^{-\frac{1}{\varkappa_\tau}} \geqq (20^2 \cdot 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{20}.$$

In jedem Falle folgt also aus (50), daß die rechte Seite von Behauptung (5) größer als $\frac{1}{20}$ ist, und die linke Seite ist höchstens $\frac{1}{20}$, so daß die Behauptung evident ist. Wir dürfen also

$$k_\tau < \frac{1}{20^2}(b_\tau - a_\tau) \tag{51}$$

annehmen. Außerdem setze ich auch noch voraus, daß

$$\frac{r(b_1 - a_1)}{R} > 1 \tag{52}$$

ist, was erlaubt ist, da sonst die rechte Seite von Behauptung (5) größer als 1 ist.

Ich wende jetzt Satz 1 an, und zwar mit x_τ statt x_1, so daß P_q jetzt den Quader

$$P_q \ldots a_\tau \leqq x_\tau < b_\tau - k_\tau, \qquad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu \neq \tau)$$

bezeichnet. Nach (2) finde ich dann für jedes positive ganze $\varrho \leqq b_\tau - a_\tau + 1$

$$\left| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\right)} + \frac{1}{\varrho}\sqrt{2\left(1 + \frac{\varrho - 1}{b_\tau - a_\tau}\right)\left| \sum_{q=0}^{\varrho-1}\left(1 - \frac{q}{b_\tau - a_\tau}\right)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x)\right|}\,, \tag{53}$$

wo

$$f_q(x) = f(x_1, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + q, x_{\tau+1}, \ldots, x_m) - f(x) \tag{54}$$

ist.

Ich werde Ungleichung (53) nur für

$$\varrho \leqq \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau) + 1 \tag{55}$$

anwenden, so daß die Ungleichung (53) geschrieben werden kann in der Gestalt

$$\left| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqq \sqrt{\frac{5}{4\varrho}} + \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{5}{2}\left| \sum_{q=0}^{\varrho-1}\left(1 - \frac{q}{b_\tau - a_\tau}\right)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x)\right|}\,. \tag{56}$$

Um den Mittelwert

$$\underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x) = \frac{1}{2} \underset{(x) \prec P_q}{M} e^{2\pi i f_q(x)} + \frac{1}{2} \underset{(x) \prec P_q}{M} e^{-2\pi i f_q(x)}$$

abzuschätzen, wende ich Satz 2 an, und zwar mit

a_μ	statt	a_μ	
b_μ	„	b_μ	$(\mu \neq \tau)$
$b_\tau - q$	„	b_τ	
$k'_\mu = k_\mu$	„	k_μ	$(\mu \neq \tau)$
$k'_\tau = k_\tau - 1$	„	k_τ	
$\frac{1}{2}\varkappa_\mu$	„	$\varkappa_\mu$	$(1 \leqq \mu \leqq \tau)$
$\varkappa_\mu$	„	$\varkappa_\mu$	$(\tau + 1 \leqq \mu \leqq m)$
P_q	„	P	
f_q bzw. $-f_q$	„	f	
qr	„	r	
$\frac{\omega}{b_\tau - a_\tau}$	„	ω.	

Der Quader $P_{(k)}$ wird dann ersetzt durch den Quader

$$\overline{P} \ldots a_\tau \leqq x_\tau < b_\tau - q - (k_\tau - 1); \qquad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu - k_\mu \qquad (\mu \neq \tau),$$

und die Funktion $g(x)$ verwandelt sich in

$$\bar{g}(x) = \Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_{\tau-1}^{k_{\tau-1}} \Delta_\tau^{k_\tau - 1} \Delta_{\tau+1}^{k_{\tau+1}} \ldots \Delta_m^{k_m} f_q(x)$$

$$= \Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_{\tau-1}^{k_{\tau-1}} \Delta_\tau^{k_\tau - 1} \Delta_{\tau+1}^{k_{\tau+1}} \ldots \Delta_m^{k_m} \sum_{h=0}^{q-1} \Delta_\tau f(x_1, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + h, x_{\tau+1}, \ldots$$

wegen (54), so daß $g(x)$ übergeht in

$$\bar{g}(x) = \sum_{h=0}^{q-1} \Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x_1, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + h, x_{\tau+1}, \ldots, x_m); \tag{57}$$

schließlich wird R noch ersetzt durch

$$\overline{R} = |\underset{(x) \prec \overline{P}}{M} \bar{g}(x)|. \tag{58}$$

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind dann erfüllt. Denn ist $\tau \geqq 2$, dann ist $k'_1 = k_1 \geqq 2$, und ist $\tau = 1$, dann ist

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad k_1 = k_1 + \ldots + k_m \geqq 3, \qquad k'_1 = k_1 - 1 \geqq 2,$$

so daß jedenfalls $k'_1 \geqq 2$ ist. Die Bedingung (3) verwandelt sich hier in

$$a_\tau + k_\tau - 1 < b_\tau - q; \qquad a_\mu + k_\mu < b_\mu \qquad (\mu \neq \tau); \tag{59}$$

diese Ungleichungen gelten für $\mu \neq \tau$ natürlich wegen (3), aber die erste der Ungleichungen (59) gilt gleichfalls wegen (51), $q \leqq \varrho - 1$ und (55). Schließlich beachte man noch, daß wegen (57) $\bar{g}(x)$ in $\overline{P}$ beständig $\geqq \sum_{h=0}^{q-1} r = qr$ oder beständig $\leqq -\sum_{h=0}^{q-1} r = -qr$ ist. Hiermit ist gezeigt,

daß alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind, so daß nach unserer Annahme wegen

$$k_1' + \ldots + k_m' = k_1 + \ldots + k_m - 1$$

dieser Satz angewendet werden darf. Man erhält dann

$$(60)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{20}\Big|\underset{(x)\prec P_q}{M} e^{2\pi i f_q(x)}\Big| < q^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_1-2}}\left(\frac{r}{\bar{R}^2}\right)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_1-2}} + q^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}} \\ &\quad + q^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}}\left(\frac{r(b_1-a_1)}{\bar{R}}\right)^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}} + \sqrt{\frac{4}{3}}\sum_{\mu=2}^{m}{}''(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\mu}}\,; \end{aligned} \right.$$ [15])

in der letzten Summe kommen nur diejenigen $\mu \geqq 2$ und $\leqq m$ in Betracht, für die $\frac{1}{2}\varkappa_\mu > 1$ ist, also

$$(61)\qquad \sum_{\mu=2}^{m}{}''(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\mu}} \leqq \sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{2}{\varkappa_\mu}},$$

wo die Summe $\sum'$ verabredetermaßen erstreckt wird über die ganzen $\mu \geqq 2$ und $\leqq m$ mit der Eigenschaft $\varkappa_\mu > 1$.

Um die durch (58) definierte Zahl $\bar{R}$ abzuschätzen, bemerke man, daß wegen (57)

$$(62)\qquad \sum_{(x)\prec \bar{P}} \bar{g}(x) = \sum_{(x)\prec \bar{P}} \sum_{h=0}^{q-1} g(y_h(x))$$

ist, wenn $(y_h(x))$ den Gitterpunkt mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + h, x_{\tau+1}, \ldots, x_m$ bezeichnet. Da (x) in $\bar{P}$ liegt, ist $y_h(x)$ ein Gitterpunkt von $P_{(k)}$, und zu jedem Gitterpunkt (y) von $P_{(k)}$ gibt es höchstens q Gitterpunkte (x) von $\bar{P}$ mit der Eigenschaft $(y) = (y_h(x))$. Das Glied $g(y)$ kommt in der rechten Seite von (62) also höchstens q-mal vor, und da entweder alle Glieder $g(y) \geqq 0$ oder alle Glieder $g(y) \leqq 0$ sind, folgt hieraus

$$\Big|\sum_{(x)\prec \bar{P}} \bar{g}(x)\Big| \leqq q\Big|\sum_{(y)\prec P_{(k)}} g(y)\Big|,$$

woraus sich wegen (58) und (4) ergibt:

$$(63)\qquad \bar{R} \leqq \frac{b_\tau - a_\tau - k_\tau}{b_\tau - a_\tau - q - k_\tau + 1}\cdot qR.$$

---

[15]) Die letzte Summe enthält das Glied $(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}}$ nur, wenn $\varkappa_\tau \geqq 4$ ist, und dann ist wegen $q \leqq \varrho - 1$ und (55)

$$(b_\tau - a_\tau - q)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}} \leqq \left(1-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 4}}(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}} = \sqrt{\frac{4}{3}}(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}}.$$

Hieraus folgt

$$\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot\overline{R}^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}\leqq\frac{b_\tau-a_\tau-q}{b_\tau-a_\tau}\cdot\frac{b_\tau-a_\tau-k_\tau}{b_\tau-a_\tau-q-k_\tau+1}\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}$$

$$\leqq\frac{b_\tau-a_\tau-q}{b_\tau-a_\tau-q-k_\tau}\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}=\left(1+\frac{k_\tau}{b_\tau-a_\tau-q-k_\tau}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}$$

$$\leqq\left(1+\frac{\frac{1}{20^2}}{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{20^2}}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}$$

wegen (51), $q\leqq\varrho-1$ und (55), also

$$\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot\overline{R}^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}\leqq\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}. \tag{64}$$

Außerdem folgt aus (63) auf genau derselben Weise

$$\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot\overline{R}^{\frac{4}{\varkappa_1}}\leqq\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1}}. \tag{65}$$

Durch Substitution von (61), (64) und (65) in (60) bekommt man

$$\frac{5}{2}\left|\sum_{q=1}^{\varrho-1}{}'\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot(\varrho-q)\underset{(x)\prec P_q}{M}\cos 2\pi f_q(x)\right|$$

$$<\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1-4}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{\frac{2}{\varkappa_1-4}}$$

$$+\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{-\frac{4}{\varkappa_1}}$$

$$+\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)$$

$$+\frac{5}{2}\cdot 20\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{2}{\varkappa_\mu}}\cdot\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)$$

$$<25{,}1\,\varrho^2(\varrho-1)^{\frac{2}{\varkappa_1-4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1-4}}+67\,\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}$$

$$+25{,}1\,\varrho^2\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}+29\,\varrho^2\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{2}{\varkappa_\mu}};$$

denn es ist

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{\frac{2}{\varkappa_1-4}} \leqq (\varrho-1)^{\frac{2}{\varkappa_1-4}} \sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q) < \frac{1}{2}\varrho^2\cdot(\varrho-1)^{\frac{2}{\varkappa_1-4}};$$

$$\frac{5}{2}\cdot 20\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot\frac{1}{2} < 25{,}1;$$

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{-\frac{4}{\varkappa_1}} < \int_0^{\varrho}(\varrho-u)u^{-\frac{4}{\varkappa_1}}du$$

$$= \left(\frac{1}{1-\frac{4}{\varkappa_1}}-\frac{1}{2-\frac{4}{\varkappa_1}}\right)\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{4}{\varkappa_1}\right)\left(2-\frac{4}{\varkappa_1}\right)}\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}}$$

$$\leqq \frac{1}{\left(1-\frac{4}{8}\right)\left(2-\frac{4}{8}\right)}\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}} = \frac{4}{3}\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}};$$

$$\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\frac{4}{3} = \frac{200}{3} < 67, \qquad \frac{5}{2}\cdot 20\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2} < 29,$$

und

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q) < \frac{1}{2}\varrho^2.$$

Das jetzt gefundene Resultat werde in (56) substituiert. Da die Quadratwurzel aus der Summe einiger positiven Glieder höchstens gleich der Summe der Quadratwurzel ist, so findet man wegen

$$\sqrt{\frac{5}{4}} < 1{,}2; \quad \sqrt{25{,}1} < 5{,}1; \quad \sqrt{67} < 8{,}2 \quad \text{und} \quad \sqrt{29} < 5{,}4$$

für jedes positive ganze ϱ mit Eigenschaft (55) die Ungleichung

$$\left|\sum_{(x)\prec P} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1{,}2}{\sqrt{\varrho}} + 5{,}1\,(\varrho-1)^{\frac{1}{\varkappa_1-4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-4}}$$

$$+ 8{,}2\,\varrho^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}1\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}.$$

Wählen wir jetzt eine beliebige (ganze oder gebrochene) positive Zahl $u \leqq \frac{1}{4}(b_\tau-a_\tau)$. Es ist dann stets möglich, die positive ganze Zahl $\varrho \leqq \frac{1}{4}(b_\tau-a_\tau)+1$ so zu wählen, daß $\varrho-1 < u \leqq \varrho$ ist, so daß nach der obigen Ungleichung für jedes positive $u \leqq \frac{1}{4}(b_\tau-a_\tau)$

$$(66)\quad \begin{cases} \left|\sum_{(x)\prec P} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1{,}2}{\sqrt{u}} + 5{,}1\,u^{\frac{1}{\varkappa_1-4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-4}} \\ + 8{,}2\,u^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}1\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}} \end{cases}$$

ist.

Jetzt kommt es darauf an, u geeignet zu wählen. Bezeichnet $Q(u)$ die größte der zwei Zahlen

$$u^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad u^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}},$$

dann können wir die positive Zahl v stets so wählen, daß

$$Q(v) - v^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}} = 0 \tag{67}$$

ist, und durch diese Relation ist v eindeutig bestimmt; die linke Seite von (67) ist ja eine stetige monoton-abnehmende Funktion von v, die bei kleinem positivem v positiv, bei großem v negativ ist. Für jedes positive u gilt dann die Beziehung

$$Q(u) - u^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}} >, = \text{ oder } < 0, \tag{68}$$

je nachdem

$$u <, = \text{ oder } > v$$

ist.

Jetzt unterscheiden wir zwei verschiedene Fälle, je nachdem $v >$ oder $\leqq \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$ ist.

1. Es sei $v > \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$. Dann ist nach (68)

$$Q\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right) > \left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}},$$

so daß aus (66) folgt, wenn darin $u = \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$ gesetzt wird

$$\left|\sum_{(x) \prec P} e^{2\pi i f(x)}\right| < 1{,}2\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + 5{,}1\, Q\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)$$
$$+ 8{,}2\left(\frac{r\omega}{4}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}1\left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}$$

und der nach der Definition von $Q(u)$ jedenfalls

$$Q(u) < u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}$$

ist, so ist hierin

$$Q\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right) < \left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{r\omega}{4}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}},$$

also

$$(69)\quad \left\{ \begin{aligned} \Big| \sum_{(x)\prec P} e^{2\pi i f(x)} \Big| &< (1{,}2+5{,}1)\cdot 2\,(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{2}} + (5{,}1+8{,}2)\cdot 4^{\frac{2}{\varkappa_1}} (r\omega)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \\ &\quad + 5{,}1\left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4 \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt die Behauptung; denn ist $\tau \geqq 2$, so ist

$$(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{2}} \leqq (b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\varkappa_\tau}};$$

$$(70)\qquad (1{,}2+5{,}1)\cdot 2 + 5{,}4 = 18 < 20$$

und

$$(71)\qquad (5{,}1+8{,}2)\cdot 4^{\frac{2}{\varkappa_1}} \leqq 13{,}3\cdot\sqrt{2} < 20,$$

und ist $\tau = 1$, dann ist

$$(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{2}} = (b_1 - a_1)^{-\frac{1}{2}} \leqq \left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}$$

wegen $R \geqq r$, $\varkappa_1 \geqq 8$ und (52), so daß auch dann die Behauptung aus (69), (70) und (71) folgt.

2. Es sei $v \leqq \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$. Dann dürfen wir in (66) $u = v$ wählen, so daß wir dann wegen (67) finden

$$(72)\quad \left\{ \begin{aligned} \Big| \sum_{(x)\prec P} e^{2\pi i f(x)} \Big| &< (1{,}2+5{,}1+8{,}2)\,Q(v) \\ &\quad - 5{,}1\left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4 \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}. \end{aligned} \right.$$

Es werden nun zwei Unterfälle unterschieden.

2.1) Es sei

$$Q(v) = v^{-\frac{1}{2}}.$$

Dann ist wegen (67)

$$Q(v) = v^{-\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{\varkappa_1-4}} \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-4}},$$

und es ist

$$Q(v) = (Q(v))^{\frac{2}{\varkappa_1-2}} \cdot (Q(v))^{\frac{\varkappa_1-4}{\varkappa_1-2}},$$

somit

$$Q(v) = \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-2}},$$

so daß dann (72) uns Behauptung (5) liefert wegen

$$(73)\qquad 1{,}2+5{,}1+8{,}2+5{,}4 = 19{,}9 < 20.$$

2.2) Es sei

$$Q(v) = v^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}.$$

Dann ist wegen (67)

$$Q(v) = v^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} = v^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}} \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}},$$

und es ist

$$Q(v) = (Q(v))^{\frac{\varkappa_1}{3\varkappa_1 - 8}} \cdot (Q(v))^{\frac{2(\varkappa_1 - 4)}{3\varkappa_1 - 8}},$$

also

$$(74) \quad \begin{cases} Q(v) = \left(\dfrac{r^2\omega}{R^2(b_\tau - a_\tau)}\right)^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}} \\ = \left\{\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 (b_1 - a_1)^{k_1} (b_2 - a_2)^{k_2} \ldots (b_{\tau-1} - a_{\tau-1})^{k_{\tau-1}} (b_\tau - a_\tau)^{k_\tau - 1}\right\}^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}}. \end{cases}$$

Ist $\tau = 1$, also

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad k_1 = k_1 + \ldots + k_m \geqq 3,$$

dann ist wegen $R \geqq r$

$$Q(v) \leqq \left\{\left(\frac{r}{R}\right)^{k_1 - 1} (b_1 - a_1)^{k_1 - 1}\right\}^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}} = \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2(k_1 - 1)}{3\varkappa_1 - 8}} \leqq \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}$$

wegen (52) und

$$\frac{2(k_1 - 1)}{3\varkappa_1 - 8} - \frac{2}{\varkappa_1} = \frac{2}{\varkappa_1(3\varkappa_1 - 8)}((k_1 - 4)\varkappa_1 + 8) \geqq 0,$$

so daß dann die Behauptung (5) aus (72) und (73) folgt.

Ist $\tau \geqq 2$, so beachte man, daß sich aus (74), $R \geqq r$ und $k_1 \geqq 2$ ergibt

$$Q(v) \leqq \left\{\left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{k_1} (b_2 - a_2)^{k_2} \ldots (b_{\tau-1} - a_{\tau-1})^{k_{\tau-1}} (b_\tau - a_\tau)^{k_\tau - 1}\right\}^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}}$$

und hierauf kann wegen (52) Hilfssatz 12 angewendet werden, d. h. es ist

$$Q(v) \leqq \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\mu=2}^{\tau} (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}} = \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}.$$

Mit Rücksicht auf (73) gilt Substitution dieses Resultates in (72) auch in diesem Falle die verlangte Ungleichung (5).

Hiermit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Groningen, 24. März 1928.

(Eingegangen am 26. März 1928.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. V.

Gewebe und Gruppen.

Von

Kurt Reidemeister in Königsberg.

Die folgenden Zeilen stehen einerseits in engem Zusammenhang mit einer Arbeit von W. Blaschke[1]) über Sechseckgewebe und einer Arbeit von K. Mayrhofer[2]) über Gewebe aus vier Kurvenscharen, die zu je dreien Sechseckgewebe bilden; sie stehen andererseits in natürlichen Beziehungen zu meiner Arbeit über die Axiome der zweigliedrigen Gruppen[3]). Ich will nämlich zeigen, daß sich in den angegebenen Geweben Vektoren erklären lassen, die zweigliedrige Gruppen erzeugen (§ 1 und 2), und mir scheint, daß dadurch die Untersuchung des Gewebes aus vier Kurvenscharen an Durchsichtigkeit und Interesse gewinnt. Gleichzeitig gewinnen wir eine einfache Kennzeichnung der analytischen zweigliedrigen Gruppen unter den stetigen (§ 3). Die Kenntnis der genannten Arbeiten ist jedoch für das folgende entbehrlich.

§ 1.

Ein 3-Gewebe.

Ein Gewebe bestehe aus Punkten und „Geraden“ (d. i. gewissen Klassen von Punkten); bei einem „ebenen“ Gewebe bestimmen zwei Gerade entweder einen Punkt oder sie seien „parallel“; sind zwei Gerade einer dritten parallel, so seien sie untereinander parallel; eine Gesamtheit paralleler Geraden nennen wir eine Schar.

Bei einem 3-Gewebe gehen durch jeden Punkt drei Gerade, und jede Gerade ist zu einer von solchen drei Geraden parallel; die Geraden des Gewebes zerfallen mit anderen Worten in drei Scharen zueinander paralleler Geraden. Entsprechend erklären wir ebene 4-Gewebe.

---

[1]) Top. Fr. d. Diffg. I, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 150—157.

[2]) Top. Fr. d. Diffg. III, Math. Zeitschr. **28** (1928).

[3]) Schriften d. Königsberger Gel. Ges., Natwiss. Kl., 4. Jahrg. 1927, Heft 5.

Man kann diesen Begriff des Gewebes einengen: Auf den Geraden kann die Zwischenrelation für Punkte erklärt und ferner kann das Paschsche ebene Anordnungsaxiom für diese Zwischenrelation gefordert werden. Man kann schließlich die Punkte der Geraden als eindimensionales Kontinuum voraussetzen und erkennt dann die Punkte des Gewebes mittels des Axioms von Pasch als zweidimensionales Kontinuum. Ein einfach zusammenhängendes „konvexes" Teilgebiet aus Punkten eines Gewebes mit Zwischenrelation nennen wir einen Gewebekern.

Unabhängig von dem Bisherigen, aber im Einklang damit, erklären wir einen stetigen Gewebekern als topologisches Bild der Kreisscheibe, die von n Kurvenscharen so überdeckt ist, daß durch jeden Punkt gerade eine Kurve aus jeder Schar hindurchgeht. Eine Kurvenschar soll topologisches Bild einer von einer Schar paralleler Strecken überdeckten Kreisscheibe sein.

Die speziellen in der Einleitung genannten Gewebe sind durch spezielle Schnittpunktseigenschaften gekennzeichnet. Solche sind natürlich von den Zwischenaxiomen unabhängig sinnvoll, und so wollen wir zunächst auf diese verzichten und ein 3-Gewebe betrachten, das folgende Konfigurationseigenschaft hat:

(Δ) *Bilden die Punkte* P_1, P_2, P_3, P_4 *und ebenfalls die Punkte* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *ein Parallelogramm, sind die entsprechenden Seiten* $P_i P_{i+1}$ *und* $Q_i Q_{i+1}$ *parallel und liegen* $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ *je auf drei parallelen Geraden, so liegen auch* P_4, Q_4 *auf einer zu* $P_1 Q_1$ *parallelen Geraden* (Fig. 1).

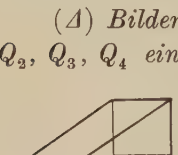


Fig. 1.

Für 3-Gewebe aus drei Geradenbüscheln der projektiven Geometrie kann man (Δ) leicht aus dem Satz von Desargues beweisen; man ist versucht (Δ) den „Parallelogramm Desargues" zu nennen. Wir wollen zeigen, daß sich (Δ) auch ganz ähnlich wie der Desarguessche Satz auswerten läßt.

Wir erklären:

(D_1) Zwei Strecken $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ heißen gleich, wenn sie auf zwei verschiedenen parallelen Geraden liegen und ein Parallelogramm bestimmen.

(D_2) Zwei Strecken $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ heißen gleich, wenn sie parallel sind oder auf derselben Geraden liegen und wenn es eine Strecke $R_1 R_2$ gibt, die sowohl mit $P_1 P_2$, wie mit $Q_1 Q_2$ ein Parallelogramm bestimmt.

Wir behaupten, daß dann aus (Δ) folgt:

Satz 1. *Sind zwei Strecken einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.*

Satz 2. *Zu jeder Strecke läßt sich von jedem Punkt aus eindeutig eine gleiche Strecke abtragen.*

$P_1 P_3$ kann man die Summe der Strecken $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ derselben Geraden nennen. Nennt man die Schar gleicher Strecken einen Vektor — ein Begriff, der wegen Satz 1 zulässig ist —, so erlaubt Satz 2 von der Summe zweier Vektoren zu sprechen. Diese Addition paralleler Vektoren ist assoziativ, weil es die der Strecken ist.

Wir gehen nun zu den Beweisen über.

Beweis für Satz 1. a) Ist $P_1 P_2$ gleich $Q_1 Q_2$ nach (D_1) und $Q_1 Q_2$ gleich $R_1 R_2$ ebenfalls nach (D_1), so sind $P_1 P_2$ und $R_1 R_2$ nach (D_2) gleich.

b) Ist $P_1 P_2$ gleich $Q_1 Q_2$ nach (D_1) und $Q_1 Q_2$ gleich $R_1 R_2$ nach (D_2), so gibt es eine Strecke $S_1 S_2$, die mit $Q_1 Q_2$ und mit $R_1 R_2$ Parallelogramme bildet. Liegen nun die Punkte $P_1 Q_1 S_1$ auf einer Geraden, so ist dies auch mit $P_2 Q_2 S_2$ der Fall, und $P_1 P_2$ ist also nach (D_2) gleich $R_1 R_2$. Liegen $P_1 Q_1 S_1$ aber nicht auf einer Geraden, so bringen wir die Gerade $P_1 Q_1$ mit der Parallelen zu $Q_1 S_1$ durch R_1 in $\bar{S}_1$ zum Schnitt und ziehen durch $\bar{S}_1$ die Parallele zu $P_1 P_2$, die die Parallele zu $Q_1 S_1$ durch R_2 in $\bar{S}_2$ schneide. Dann liegt $\bar{S}_2$ nach (Δ) auf der Geraden $P_2 Q_2$, und $P_1 P_2$ ist daher wieder nach (D_2) gleich $R_1 R_2$.

c) Ist schließlich $P_1 P_2$ gleich $Q_1 Q_2$ nach (D_2) und $Q_1 Q_2$ gleich $R_1 R_2$ ebenfalls nach (D_2), so existiert also eine Strecke $S_1 S_2$, die mit $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ Parallelogramme bildet, und eine Strecke $T_1 T_2$, die mit $Q_1 Q_2$ und $R_1 R_2$ Parallelogramme bildet. Nach b) ist daher $S_1 S_2$ gleich $R_1 R_2$ und daher wieder nach b) $P_1 P_2$ gleich $R_1 R_2$.

Beweis für Satz 2. Ist $P_1 P_2$ eine Strecke und Q_1 ein Punkt und bestimmen $P_1 Q_1$ eine Gerade, die nicht durch P_2 hindurchgeht und ist Q_2 der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $P_1 P_2 Q_1$, so ist $Q_1 Q_2$ gleich $P_1 P_2$, und ist $Q_1 \bar{Q}_2$ eine zu $P_1 P_2$ gleiche Strecke, so ist $\bar{Q}_2$ mit Q_2 identisch. Ist die eben gemachte Voraussetzung nicht erfüllt, so ziehen wir durch P_1 und Q_1 zwei weder zueinander noch zu $P_1 P_2$ parallele Geraden, die sich in R_1 schneiden mögen, dann bestimmen wir R_2 als vierten Eckpunkt des Parallelogramms $P_1 P_2 R_1$ und Q_2 als vierten Eckpunkt des Parallelogramms $R_1 R_2 Q_1$. Q_2 ist wegen (Δ) von der Auswahl der Geraden durch P_1 und Q_1 unabhängig und daher eindeutig bestimmt. —

Umgekehrt sieht man: ist der nach (D_1) und (D_2) erklärte Gleichheitsbegriff für die Strecken einer Schar paralleler Geraden transitiv, so gilt auch (Δ).

Fordern wir außer (Δ) noch *die in Fig. 2 dargestellte Konfiguration* (Δ^*), so gilt ferner

Satz 3. *Ist* P_1P_2 *gleich* Q_1Q_2 *und* P_2P_3 *gleich* Q_2Q_3, *so ist auch* P_1P_3 *gleich* Q_1Q_3.

Satz 4. *Die Addition der Vektoren ist kommutativ.*

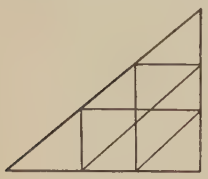


Fig. 2.

Satz 3 ist trivial, wenn die P_i auf einer Geraden liegen. Andernfalls bemerken wir: Zwischen zwei Dreiecke, die den Voraussetzungen des Satzes genügen, läßt sich stets so ein Dreieck $R_1R_2R_3$ einschalten, daß P_1P_3 und R_1R_3 auf derselben Geraden, daß R_2R_3 und Q_2Q_3 auf derselben Geraden liegen und daß P_1P_2 gleich R_1R_2 gleich Q_1Q_2, P_2P_3 gleich R_2R_3 und R_1R_3 gleich Q_1Q_3 ist. Bringen wir die Parallele zu R_2R_3 durch R_1 mit P_1P_2 in S_1 und die Parallele zu P_1P_2 durch P_3 mit R_2R_3 in S_3 zum Schnitt, so ist nach (Δ^*) P_1P_3 gleich S_1S_3 gleich R_1R_3 gleich Q_1Q_3.

Um Satz 4 zu beweisen, knüpfen wir an die eben entwickelte Figur an und zeigen, daß $P_1P_3 + P_3R_1$ gleich $P_3R_1 + R_1R_3$ ist. Ist nämlich P_4 die vierte Ecke des Parallelogramms $P_1P_2P_3$ und R_4 die vierte Ecke des Parallelogramms $R_1R_2R_3$, so ist nach (Δ) P_4R_4 parallel zu $P_1P_3R_1R_3$ und daher P_1R_1 gleich P_4R_4 gleich P_3R_3.

Daß (Δ^*) von (Δ) unabhängig ist, sieht man an den Geradenscharen $x = a$, $y = b$, $ax + by = 0$, wenn die a, b Desarguessche Zahlen sind: Einer Strecke der dritten Geradenschar P_1P_2 können wir, wenn P_i die Koordinaten x_i, y_i hat, die Maßzahl $r_{12} = x_1^{-1}x_2$ zuschreiben. Gleiche Strecken haben die gleichen Maßzahlen und umgekehrt. Hat P_2P_3 die Maßzahl r_{23}, so hat der Repräsentant P_1P_3 der Summe von P_1P_2 und P_2P_3 die Maßzahl $r_{13} = r_{12}r_{23}$, und daher gilt das kommutative Gesetz der Vektoraddition nicht. Nehmen wir aber die Zwischenaxiome und das Archimedische Axiom für die Streckenaddition hinzu, so läßt sich (Δ^*) beweisen. Bilden die Punkte der Geraden ein Kontinuum, so lassen sich alle Strecken halbieren, und man kann (Δ) durch den Spezialfall der Sechseckkonfiguration ersetzen[1]); dieser entsteht aus (Δ), wenn man P_1P_3 als Strecke nimmt und P_3 mit Q_1 zusammenfallen läßt.

§ 2.

Ein 4-Gewebe.

Wir betrachten jetzt ein 4-Gewebe, für das (Δ) gilt. Wir fassen die 4 Geradenscharen irgendwie zu zweien in zwei Klassen zusammen; die parallelen Geraden der ersten Klasse nennen wir linksparallel, die der zweiten rechtsparallel. Unter einer Strecke verstehen wir ein Punktepaar einer Geraden der rechtsparallelen Klasse, und definieren nun die Streckengleichheit ähnlich wie in § 1 so:

(D_1). Zwei Strecken P_1P_2 und Q_1Q_2 heißen gleich, wenn sie parallel sind und ein Parallelogramm bestimmen, dessen zweites Seitenpaar linksparallel ist.

(D_2). Zwei Strecken P_1P_2 und Q_1Q_2 heißen gleich, wenn es eine zu beiden parallele Strecke R_1R_2 gibt, die mit beiden Parallelogramme bestimmt, deren zweite Seitenpaare linksparallel sind.

Aus den Überlegungen von § 1 folgt alsdann, daß die Streckengleichheit transitiv ist, und daß sich von jedem Punkte eindeutig eine zu einer gegebenen Strecke gleiche antragen läßt. Es ist wieder die Definition von Vektoren und einer assoziativen Summe paralleler Vektoren möglich. Wir wollen die Vektoren mit kleinen lateinischen Buchstaben x oder y und Indizes bezeichnen, je nachdem sie zu der einen oder anderen Schar gehören, und die Summe $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$ schreiben.

Ist die Streckengleichheit transitiv, so folgt umgekehrt, daß (Δ) für die beiden 3-Gewebe aus den beiden linksparallelen und je einer rechtsparallelen Schar erfüllt ist. Die Eigenschaft (Δ) für die beiden anderen 3-Gewebe, die man aus unserem 4-Gewebe herausheben kann, besagt aber gerade das Folgende:

Satz 5. *Sind P_1P_2 und P_2P_3 zwei nichtparallele Strecken und ist P_4 die vierte Ecke des Parallelogramms $P_1P_2P_3$, sind Q_1Q_2 und Q_2Q_3 zwei bzw. zu P_1P_2 und P_2P_3 gleiche Strecken und Q_4 die vierte Ecke des Parallelogramms $Q_1Q_2Q_3$, so sind auch P_1P_4 und P_4P_3 bzw. gleich Q_1Q_4 und Q_4Q_3.*

Geht nämlich durch P_1 und Q_1 eine Gerade der linksparallelen Klasse, so folgt das Behauptete sofort aus (Δ). Ist das nicht der Fall, so gibt es Hilfspunkte R_1, R_2, R_3, R_4 (P_iP_k gleich R_iR_k gleich Q_iQ_k), so daß P_1 und R_1 einerseits, R_1 und Q_1 andrerseits eine Gerade der linksparallelen Klasse bestimmen.

Mit Hilfe von Satz 5 können wir eine assoziative Kompositionsvorschrift auch für nichtparallele Vektoren erklären. Repräsentiert P_1P_2 den Vektor x, P_2P_3 den Vektor y, so wollen wir das Punktepaar P_1P_3 den Repräsentanten der Summe $x + y$ nennen. Nun besagt Satz 5: Sind x und y zwei Vektoren, so gibt es zwei durch sie eindeutig bestimmte Vektoren $\bar{x} = f(x, y)$, $\bar{y} = g(x, y)$, so daß $y + x = \bar{x} + \bar{y}$ ist. Die Summe $x + y + x^*$ erklären wir daher durch

$$x + y + x^* = [x + f(x^*, y)] + g(x^*, y). \tag{1}$$

Nach dieser Vorschrift kann man jede Vektorsumme in die Form $x + y$ setzen. Die Summe ist assoziativ, weil das Aneinandersetzen der Repräsentanten von Vektorsummen, der Punktepaare, assoziativ ist. Der durch zwei zusammenfallende Punkte repräsentierte Vektor ist das Einheitsele-

ment 0; repräsentiert P_1P_3 das Element $x+y$, so P_3P_1 das inverse Element $-x-y$. Kurz, *die Elemente $x+y$ mit der Kompositionsvorschrift* (1) *bilden eine Gruppe.*

§ 3.

Zweigliedrige stetige Gruppenkerne mit zwei eingliedrigen Untergruppen.

Wir wollen nunmehr zeigen: *Bei einem stetigen 4-Gewebekern mit der Eigenschaft (Δ) sind die Funktionen $f(x,y)$, $g(x,y)$ analytisch.* Daraus folgt dann, daß die durch sie definierten Gruppenkerne ebenfalls analytisch sind, daß sie also entweder zu einem Kern der ebenen Translationen oder der Gruppe $\bar{\xi}=\alpha\xi+\beta$, $\bar{\eta}=\alpha\eta$ isomorph sind.

Die Geraden des Gewebes sind Bahnkurven dieser Gruppen. Die Scharen der Rechtsparallelen sind die beiden Scharen von Bahnkurven, die zu den eingliedrigen Gruppen der Vektoren x und y gehören. Aber auch die übrigen Geraden sind Bahnkurven, wenn auch nicht die ganzen Scharen i. a. zu je einer einzigen eingliedrigen Gruppe gehören.

Sind nämlich die Geraden g_0 durch P_0 und g_1 durch P_1P_2 linksparallel und stellt P_0P_1 den Vektor x, P_0P_2 den Vektor y dar, so führt die $-x$ entsprechende Transformation g_1 in g_0 und daher die $-x+y$ entsprechende offenbar g_1 in sich selbst über. Daraus folgt sofort, daß g_1 eine Bahnkurve der durch $-x+y$ bestimmten eingliedrigen Gruppe ist. Ist nämlich P_0' ein Punkt der Strecke P_0P_1, P_2' der Punkt, in welchem die Rechtsparallele durch P_0' zu P_0P_2 die Gerade g_1 trifft, repräsentiert $P_0'P_1$ den Vektor x', $P_0'P_2'$ den Vektor y', so wird g_1 auch durch die $-x'+y'$ entsprechende Transformation in sich übergeführt, und daher läßt sich x' (bzw. die x' entsprechende lineare Transformation) so bestimmen, daß $-x'+y'-x'+y'=-x+y$ wird. — Die zu g_1 linksparallelen Geraden lassen sich als zu g_1 abstandsparallele Kurven aus g_1 konstruieren; sie gehen aus g_1 z. B. durch die x entsprechenden Transformationen hervor. Die Bahnkurven der Translationen und der Gruppe $\bar{\xi}=\alpha\xi+\beta$, $\bar{\eta}=\alpha\eta$ sind aber Gerade im gewöhnlichen Sinne und so folgt:

Ein stetiger 4-Gewebekern mit der Eigenschaft (Δ) läßt sich auf vier Geradenbüschel der projektiven Ebene abbilden[2]).

Es gibt drei topologisch verschiedene Typen solcher 4-Gewebe, je nachdem die Träger T_i der vier Geradenbüschel auf einer Geraden liegen oder von ihnen nur drei T_1, T_2, T_3 auf einer Geraden liegen oder die T_i Punkte allgemeiner Lage sind. Im ersten Fall ist der Desarguessche Satz für Dreiecke stets erfüllt, im zweiten Fall für Dreiecke aus den zu T_1, T_2, T_3 gehörigen Scharen, sonst nicht, im dritten Fall ist er überhaupt nicht erfüllt. Die Gewebe der ersten Art geben zu kommutativen Vektorgruppen

Anlaß, die beiden anderen zu nichtkommutativen. Nimmt man im zweiten Fall die Schar, die zu T_4 gehört, und eine weitere, etwa die zu T_3 gehörige als rechtsparallele, so ist die eingliedrige Untergruppe, die zu T_3 gehört, die invariante Untergruppe. Im letzten Fall sind die beiden eingliedrigen Vektorgruppen nicht invariante Untergruppen.

Aus unseren Ergebnissen folgert man leicht: *Eine topologische Abbildung der Ebene, welche vier Geradenbüschel in vier Geradenbüschel überführt, ist eine projektive.*

Rein gruppentheoretisch ausgedrückt lautet unser Resultat: *Ein stetiger zweigliedriger Gruppenkern mit zwei eingliedrigen Untergruppenkernen ist analytisch.*

Nun zu dem Nachweis, daß $f(x, y)$, $g(x, y)$ analytisch sind. Zunächst wollen wir die Funktionalgleichungen aufstellen, die ausdrücken, daß die Vektoraddition assoziativ ist. Aus $(y + x_1) + x_2 = y + (x_1 + x_2)$ folgt

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & f(x_1, y) + f(x_2, g(x_1, y)) = f(x_1 + x_2, y), \\ \text{b)} & g(x_2, g(x_1, y)) = g(x_1 + x_2, y). \end{array}$$

Aus $(y_1 + y_2) + x = y_1 + (y_2 + x)$ folgt

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & f(f(x, y_2), y_1) = f(x, y_1 + y_2), \\ \text{b)} & g(f(x, y_2), y_1) + g(x, y_2) = g(x, y_1 + y_2). \end{array}$$

Die übrigen Summen $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + y + x_2$, usw. sind an sich assoziativ. Da 0 dem Einheitselement entspricht, ist

$$(3)\quad f(x, 0) = x,\ g(0, y) = y;\quad f(0, y) = 0,\ g(x, 0) = 0.$$

Aus den Anordnungsaxiomen für die Punkte der Geraden folgt, daß die x, y reelle Zahlen sind. Nach bekannten Sätzen über stetige eingliedrige Gruppen können wir x und y als kanonische Parameter der beiden durch die x allein und die y allein gebildeten Gruppen nehmen[4]); alsdann bedeutet das Symbol $x_1 + x_2$ und das Symbol $y_1 + y_2$ die gewöhnliche Addition zwischen reellen Zahlen. Mit dem Axiom von Pasch folgt, daß $f(x, y)$ und $g(x, y)$ stetige Funktionen sind. Weiter folgt aus ihm:

(4) $f(x, y_0)$ ist bei festem y_0 monoton wachsend in x. $g(x_0, y)$ ist bei festem x_0 monoton wachsend in y. — Nach (3) und (4) haben $f(x, y)$ und x, sowie $g(x, y)$ und y immer gleiches Vorzeichen.

(5) $f(x_0, y)$ ist bei festem x_0 monoton in y oder konstant. $g(x, y_0)$ ist bei festem y_0 monoton in x oder konstant.

Ist nämlich für ein Wertepaar x_0, y_0

$$f(x_0, y_0) = x_0 \qquad (y_0 \neq 0),$$

[4]) Vgl. z. B. Brouwer, Math. Annalen, **67** (1909), S. 246—247.

so ist nach (2a) auch $f(x_0, 2y_0) = x_0$. Ebenso muß auch $f(x_0, \frac{1}{2}y_0) = x_0$ sein. Wäre nämlich $f(x_0, \frac{1}{2}y_0) = \bar{x}_0 > x_0$, so wäre nach (2a) $x_0 = f(\bar{x}_0, \frac{1}{2}y_0)$ und nach (4)

$$f(\bar{x}_0, \tfrac{1}{2}y_0) > f(x_0, \tfrac{1}{2}y_0) = \bar{x}_0.$$

Es ist für alle y also $f(x_0, y) = x_0$. Ist aber allgemeiner $f(x_0, y_0 \quad h_0) = f(x_0, y_0)$, so folgt nach (2a)

$$f(x_0, y_0 + h_0) = f(f(x_0, y_0)\, h_0) = f(x_0, y_0);$$

also ist auch dann nach dem soeben erreichten Resultat $f(x_0, y)$ konstant.

(6) Nach geeigneter Erklärung der positiven Richtung der x- und y-Vektoren ist stets $f(x, y_1) > f(x, y_2)$, wenn $y_1 > y_2$ oder $f(x, y)$ ist identisch gleich x; und $g(x_1, y) > g(x_2, y)$, wenn $x_1 > x_2$ oder $g(x, y)$ ist identisch gleich y. Denn aus (1a) und (4) folgt z. B.: Ist $f(x_1, y)$ und $f(x_2, y)$ monoton wachsend in y, so ist auch $f(x_1 + x_2, y)$ monoton wachsend in y. Ist also $f(x_0, y)$ monoton wachsend, so ist auch $f(2x_0, y)$ und $f(\frac{1}{2}x_0, y)$ monoton wachsend in y. — Wegen (3) ist daher $f(x, y) \geqq x$, wenn $y \geqq 0$, und $g(x, y) \geqq y$, wenn $x \geqq 0$.

(7) $f(x, y)$ und $g(x, y)$ sind bei konstantem y in x und bei konstantem x in y konvex. Denn z. B. ist nach (1a)

$$f(x + h, y) - f(x, y) = f(g(x, y), h)$$

und die rechte Seite nach (6) bei festem y und h in x monoton wachsend. Ferner ist nach (2a)

$$f(x, y + h) - f(x, y) = f(f(x, h), y) - f(x, y).$$

Sei nun etwa $h > 0$, dann ist nach (6) $f(x, h) - x = k \geqq 0$ und nach (1a)

$$f(x + k, y) - f(x, y) = f(k, g(x, y))$$

eine bei konstantem x und k in y monoton wachsende oder konstante Funktion. — Also existieren die partiellen Rechts- und Linksdifferentialquotienten von $f(x, y)$ und $g(x, y)$. Wir wollen im folgenden nur Rechtsdifferentialquotienten bilden und sie wie gewöhnliche Differentialquotienten $f_x(x, y)$ usw. bezeichnen.

(8) $f_x(0, y)$, $f_y(x, 0)$, $g_x(0, y)$, $g_y(x, 0)$ sind analytische Funktionen. Denn aus (2a) folgt z. B. durch Differenzieren nach x

$$f_x(f(x, y_2), y_1)\, f_x(x, y_2) = f_x(x, y_1 + y_2);$$

Setzen wir $x = 0$, so wird auch $f(x, y_2) = 0$, und es kommt

$$f_x(0, y_1) f_x(0, y_2) = f_x(0, y_1 + y_2).$$

Also stimmt $f_x(0, y)$ mit einer Funktion a^y in einer dichten Punktmenge überein, und da $f_x(0, y)$ nach (7) monoton ist, so muß die Funktion

überall mit a^y übereinstimmen. Differenziert man nun (2 b) nach x, so erhält man

$$g_x(f(x, y_2), y_1) f_x(x, y_2) + g_x(x, y_2) = g_x(x, y_1 + y_2),$$

setzt man hierin $x = 0$ und also $f(x, y_2) = 0$, so kommt

$$g_x(0, y_1) f_x(0, y_2) + g_x(0, y_2) = g_x(0, y_1 + y_2).$$

Ist $f_x(0, y)$ identisch gleich 1, so ist $g_x(0, y) = b^y$. Andernfalls ist $g_x(0, y)$ konvex, da $g_x(0, y + h) - g_x(0, y) = g_x(0, h) a^y$ in y monoton ist. Wir können also die Funktionalgleichung nach y_1 differenzieren und finden dann für $g_{xy}(0, y)$ die Gleichung $g_{xy}(0, y_1) a^{y_2} = g_{xy}(0, y_1 + y_2)$. —

Nun sind wir sofort am Ziel. Differenzieren wir nämlich (2 a) nach y_1 und setzen dann $y_1 = 0$ und $y_2 = y$, so kommt

$$f_y(f(x, y), 0) = f_y(x, y).$$

Differenzieren wir (1 a) nach x_2 und setzen dann $x_2 = 0$ und $x_1 = x$, so kommt

$$f_x(0, g(x, y)) = f_x(x, y).$$

Analog ergibt sich

$$g_x(0, g(x, y)) = g_x(x, y) \quad \text{und} \quad g_y(f(x, y), 0) = g_y(x, y).$$

Also sind $f(x, y)$ und $g(x, y)$ analytische Funktionen.

(Eingegangen am 21. März 1928.)

Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

E. Zermelo in Freiburg i. B.

Schachturniere werden neuerdings immer in der Weise ausgeführt, daß jeder Teilnehmer mit jedem anderen eine bestimmte Anzahl k von Partien (gewöhnlich zwei mit wechselndem Anzuge) zu spielen hat und dann die Reihenfolge der Sieger nach der Anzahl ihrer Gewinnpartien bestimmt wird, wobei eine unentschiedene („Remis"-) Partie jedem der beiden Partner immer als halbe Gewinnpartie angerechnet wird. Dieses Berechnungsverfahren, das alle gespielten Partien unabhängig von der Reihenfolge gleichmäßig berücksichtigt und dadurch dem Zufall möglichst wenig Einfluß gestattet, hat sich in der Praxis anscheinend auch durchaus bewährt, soweit eben nur die *Reihenfolge* in Betracht kommt, versagt aber völlig bei *abgebrochenen* Turnieren (in welchen die Anzahl der gespielten Partien nicht bei jedem Teilnehmer die gleiche ist) und liefert auch bei durchgeführten keine befriedigende *quantitative* Bestimmung der *relativen Spielstärken*, da es ganz augenscheinlich der Mittelmäßigkeit zu gute käme. So würde etwa bei $k = 1$ ein Meister gegen n Stümper doch nur n Partien gewinnen, diese alle zusammen aber $\frac{n(n-1)}{2}$, jeder von ihnen also durchschnittlich $\frac{n-1}{2}$, und der Quotient der berechneten Werte $n : \frac{n-1}{2} = \frac{2n}{n-1}$ würde sich mit wachsendem n der 2 nähern, der Sieger also nur etwa doppelt so hoch bewertet werden wie jeder andere. Zur Behebung dieses Übelstandes und zur quantitativen Verfeinerung des üblichen Verfahrens sind in der Schachliteratur verschiedene Vorschläge gemacht und diskutiert worden, u. a. von E. Landau[1]), die aber, so inter-

[1]) E. Landau, Über Preisverteilung bei Spielturnieren. Ztschr. f. Math. u. Phys. **63** (1914), S. 192.

essant sie auch in mathematischer Beziehung waren, gelegentlich zu paradoxen Ergebnissen führten und bisher keine befriedigende Lösung des Problems ergaben. Im folgenden soll nun ein neues Verfahren der Turnier-Berechnung entwickelt werden, das von den bisherigen Bedenken frei zu sein scheint und namentlich auch bei „abgebrochenen" und „kombinierten" Turnieren zu einem mathematisch bestimmten und allen vernünftigen Anforderungen entsprechenden Ergebnisse führt.

Unser Verfahren kommt darauf hinaus, daß die relativen Spielstärken als Wahrscheinlichkeiten aufgefaßt und so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des beobachteten Turnier-Ergebnisses eine möglichst große wird.

§ 1.

Ansatz und Reduktion des Problems.

Jedem der n an einem Turnier teilnehmenden Spieler A_r denken wir uns eine positive Zahl u_r als „Spielstärke" zugeordnet und nehmen an, daß diese Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sich wie ihre relativen Gewinnchancen verhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer bestimmten Partie A_r gegen A_s gewinnt, wird also gegeben durch den Bruch:

$$(1) \qquad w_{rs} = \frac{u_r}{u_r + u_s}.$$

Ist dann k_{rs} die Anzahl der zwischen A_r und A_s gespielten Partien, von denen wir hier[2]) annehmen wollen, daß sie alle zur Entscheidung kommen, g_{rs} die dabei von A_r und $g_{sr} = k_{rs} - g_{rs}$ die von A_s gewonnenen, so wird, wenn wir die verschiedenen Partien als „unabhängige" Ereignisse betrachten, die kombinierte Wahrscheinlichkeit des auf A_r und A_s bezüglichen Teilergebnisses, daß nämlich A_r gerade g_{rs} und A_s entsprechend g_{sr} Partien gegen den andern gewinnt, bis auf einen von u_r, u_s unabhängigen Zahlenfaktor $\sigma_{rs} = \binom{k_{rs}}{g_{rs}}$, auf den mich Herr Prof. Ostrowski freundlichst aufmerksam machte,

$$(2) \qquad w_{rs} = u_{rs}^{g_{rs}} u_{sr}^{g_{sr}} = \frac{u_r^{g_{rs}} u_s^{g_{sr}}}{(u_r + u_s)^{k_{rs}}},$$

[2]) Bei allen praktischen Anwendungen berücksichtigen wir die etwa vorkommenden unentschiedenen („Remis"-) Partien durch die Fiktion, daß doppelt so viel Partien gespielt seien, indem wir jedem Spieler jede tatsächlich gewonnene Partie als *doppelten* und jede unentschiedene als *einfachen* Gewinn anrechnen. Dies entspricht genau der im Eingang erwähnten herkömmlichen Zählung der Remis-Partien als halbe Gewinnpartien.

und somit die Wahrscheinlichkeit des durch die Matrix g_{rs} bestimmten Gesamtresultates das Produkt aller dieser Wahrscheinlichkeiten

$$(3) \qquad w = \prod_{r,s}' w_{rs} = \frac{u_1^{g_1} u_2^{g_2} \dots u_n^{g_n}}{\prod_{r,s}' (u_r + u_s)^{k_{rs}}} = \Phi(u_1, \dots, u_n),$$

wo

$$(4) \qquad g_r = \sum_s^{s \neq r} g_{rs}$$

immer die Gesamtzahl der von A_r gewonnenen Partien bezeichnet und das Produkt $\prod'$ über alle Kombinationen r, s mit $r \neq s$ zu erstrecken ist.

Die (nicht negativen) Zahlen $u_1, \dots, u_n$ sollen nun so bestimmt werden, daß $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ möglichst groß und damit das beobachtete, durch die Zahlen $g_1, \dots, g_n$ bestimmte Turnier-Ergebnis möglichst wahrscheinlich wird[3]).

Da Φ in bezug auf die Variablen u_r homogen von der nullten Dimension ist, also nur von ihren Verhältnissen abhängt, so können wir o. B. d. A. annehmen, daß

$$(5\,a) \qquad \sum_{r=1}^{n} u_r \leqq 1$$

ist, während gleichzeitig für alle r

$$(5\,b) \qquad u_r \geqq 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n)$$

vorausgesetzt wird.

Der durch (5a) und (5b) bestimmte Bereich $\mathfrak{B}$ der u_r ist endlich und abgeschlossen; in ihm ist die durch (3) als Wahrscheinlichkeit definierte Funktion Φ überall $\leqq 1$, besitzt also eine endliche obere Grenze $\bar{w} \leqq 1$; dabei muß

$$(6) \qquad \bar{w} \geqq \Phi(1, \dots, 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^N > 0$$

sein, wo

$$(7) \qquad N = \sum_{r=1}^{n} g_r = \sum_{r,s}^{r \neq s} k_{rs}$$

die Anzahl aller überhaupt gespielten Partien ist. Nach Weierstraß gibt es in $\mathfrak{B}$ mindestens einen Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ mit den Koordinaten $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$, in dessen Umgebung der Wert $\bar{w}$ von Φ approximiert wird.

Wir müssen jetzt die beiden Fälle unterscheiden, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ im Innern oder auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ liegt.

[3]) Dieser Ansatz ist einem insbesondere in der Gastheorie häufig angewendeten Verfahren analog.

Fall 1. $\bar{\mathfrak{q}}$ liege im Innern von $\mathfrak{B}$, d. h.

$$\sum_{r=1}^{n} \bar{u}_r < 1 \quad \text{und} \quad \bar{u}_r > 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist Φ *stetig* an der Stelle $\bar{\mathfrak{q}}$ und es wird

$$\Phi(\bar{\mathfrak{q}}) = \bar{w}$$

das *Maximum* von Φ in $\mathfrak{B}$. Da Φ dann in $\bar{\mathfrak{q}}$ zugleich auch nach allen Variablen differentiierbar und von Null verschieden ist, so müssen auch die partiellen logarithmischen Ableitungen sämtlich in $\bar{\mathfrak{q}}$ verschwinden, d. h.

$$\frac{g_r}{u_r} - \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{u_r + u_t} = 0$$

oder

$$\sum_t{}' k_{rt} \frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_r + \bar{u}_t} = g_r \quad \text{für} \quad r = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

wobei die Summe $\sum'$ über alle $t \neq r$ zu nehmen ist. Wir erhalten also ein System von n homogenen algebraischen Gleichungen zur Bestimmung von $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ oder vielmehr ihrer Verhältnisse $\bar{u}_r : \bar{u}_s$.

Durch Addition der n Gleichungen (8) erhält man wegen

$$\frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_r + u_t} + \frac{\bar{u}_t}{\bar{u}_r + \bar{u}_t} = 1$$

die Identität (7) als Ausdruck der zwischen den Gleichungen des Systems bestehenden Abhängigkeit.

Da $k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t}$ die „wahrscheinliche Anzahl" der von A_r gegen A_t gewonnenen Partien darstellt, so bedeutet das Gleichungssystem (8), daß bei der unserm Ansatze entsprechenden Bewertung der Spieler *die wahrscheinliche Anzahl der von einem Spieler gegen alle übrigen Spieler zu gewinnenden Partien gleich der Anzahl der von ihm wirklich gewonnenen ist.*

Fall 2. $\bar{\mathfrak{q}}$ liege auf dem *Rande* von $\mathfrak{B}$ derart, daß alle

$$\bar{u}_r > 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

aber

$$\sum_r \bar{u}_r = 1$$

ist. Da nun aber die Funktion Φ in $u_1, \ldots, u_n$ homogen von 0-ter Dimension ist

$$\Phi(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) = \Phi(u_1, \ldots, u_n), \tag{9}$$

so wird der Grenzwert $\bar{w}$ dann für $0 < \lambda < 1$ auch im *Innern* von $\mathfrak{B}$ approximiert und damit der Fall 2 auf den Fall 1 zurückgeführt.

Fall 3. Der Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ liege auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ derart, daß

$$(10) \qquad \Pi \bar{u}_r = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_n = 0$$

wird, d. h. daß mindestens ein $\bar{u}_r = 0$ wird.

Ist z. B. $\bar{u}_1 = 0$, während alle übrigen $\bar{u}_r > 0$ sind, so ist der Nenner der Funktion Φ an der Stelle $\bar{\mathfrak{q}}$ von Null verschieden. Also muß auch $g_1 = 0$ sein, da nach (3) sonst Φ eine Potenz $u_1^{g_1}$ von u_1 als Faktor enthielte und daher w an der Stelle $\bar{\mathfrak{q}}$ anstatt des Wertes $\bar{w} > 0$ die Null approximieren würde. Ist umgekehrt $g_1 = 0$, so erscheint u_1 in (3) nur im Nenner, und zwar in allen Faktoren $u_1 + u_s$ als positiver Summand, der den Quotienten verkleinert, muß sich also bei der Approximation der oberen Grenze $\bar{w}$ seiner eigenen unteren Schranke 0 nähern, d. h. $\bar{u}_1 = 0$. Nach unserem Ansatz wird also ein einzelner Spieler mit der Spielstärke 0 bewertet dann und nur dann, wenn er als einziger im Turnier alle seine Partien verliert [4]).

Seien jetzt allgemein[5]) bei geeignet gewählter Reihenfolge

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \dots = \bar{u}_p = 0; \qquad \bar{u}_{p+1},\ \bar{u}_{p+2}, \dots,\ \bar{u}_n > 0.$$

Dann folgt wie im Spezialfall, daß Φ in (3) keinen Faktor der Form $u_{rs} = \frac{u_r}{u_r + u_s}$ für $r \leqq p < s$ enthalten darf, weil sich sonst dieser und mit ihm Φ bei der Approximation an die Grenzstelle $\bar{\mathfrak{q}}$ der Null nähern müßte, was wegen (6) $\bar{w} > 0$ unmöglich ist. In diesem Falle müssen also alle $g_{rs} = 0$ sein für $r \leqq p < s$, d. h. wir haben eine *Einteilung aller Spieler in zwei Klassen derart, daß jeder Spieler A_r der ersten Klasse gegen keinen Spieler A_s der zweiten Klasse in dem Turnier eine Partie gewinnt* (sondern alle etwa gespielten Partien verliert).

Hat umgekehrt das Ergebnis des Turniers zu einer solchen Klassenbildung $\{A_r, A_s\}$ mit $g_{rs} = 0$ geführt, *so müssen bei der Approximation von $\bar{w}$ durch Φ alle u_r, die den Spielern A_r der Unterklasse zugeordnet sind und für wenigstens ein $s > p$ die Bedingung $k_{rs} > 0$ erfüllen* (d. h. sofern die A_r überhaupt gegen die A_s gespielt haben), *sich der Null nähern*: $\bar{u}_r = 0$.

Um dies zu beweisen, zerlegen wir die durch (3) definierte Funktion Φ in drei Faktoren

$$(11) \qquad \Phi(u) = \Phi_1(u_r)\, \Phi_2(u_s)\, \Phi_{1,2}(u_r, u_s),$$

[4]) Dieses Ergebnis ist nur scheinbar paradox, da kein Spieler bei noch so geringer Spielstärke schlechter abschneiden könnte. Vgl. E. Landau a. a. O. S. 201.

[5]) Der Fall, daß alle $u_r = 0$ sind, können wir wegen der Homogenität (9) von Φ ausschließen.

wo

$$\Phi_1(u_r) = \prod_{1 \leqq r, r' \leqq p}^{r \neq r'} \frac{u_r^{g_{rr'}} u_{r'}^{g_{r'r}}}{(u_r + u_{r'})^{k_{rr'}}}, \qquad \Phi_2(u_s) = \prod_{p+1 \leqq s, s' \leqq n}^{s \neq s'} \frac{u_s^{g_{ss'}} u_{s'}^{g_{s's}}}{(u_s + u_{s'})^{k_{ss'}}},$$

$$\Phi_{1,2}(u_r, u_s) = \prod_{r=1}^{p} \prod_{s=p+1}^{n} \left(\frac{u_s}{u_r + u_s}\right)^{k_{rs}},$$

da nach der gemachten Annahme wegen $g_{rs} = 0$ Faktoren $u_{r,s}$ gar nicht auftreten.

Ersetzen wir jetzt alle u_r mit $r \leqq p$ durch λu_r, wo $0 < \lambda < 1$ ist, so bleiben wegen der Homogenität Φ_1 und Φ_2 ungeändert, während $\Phi_{1,2}$ übergeht in

$$\Phi_{1,2}^{(\lambda)} = \prod_{r=1}^{p} \prod_{s=p+1}^{n} \left(\frac{u_s}{\lambda u_r + u_s}\right)^{k_{rs}} = \Phi_{1,2}(\lambda u_r; u_s). \tag{12}$$

Angenommen, an einer Approximationsstelle $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{w}$ sei eine der Größen $\bar{u}_r > 0$ $(r \leqq p)$ mit $k_{rs} > 0$, dann wäre wegen $\lambda > 0$

$$\frac{\Phi_{1,2}^{(\lambda)}}{\Phi_{1,2}} \geqq \left(\frac{u_r + u_s}{\lambda u_r + u_s}\right)^{k_{rs}},$$

wo der Quotient rechts bei der Annäherung an $\bar{\mathfrak{q}}$ sich wegen $\bar{u}_r > 0$, $\lambda < 1$, und $k_{rs} > 0$ dem Werte:

$$\left(\frac{\bar{u}_r + \bar{u}_s}{\lambda \bar{u}_r + \bar{u}_s}\right)^{k_{rs}} > 1$$

nähert; es wäre also in $\bar{\mathfrak{q}}$

$$\Phi_{1,2}^{(\lambda)} > \Phi_{1,2},$$

und demnach

$$\lim \Phi(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_p; u_{p+1}, \ldots, u_n) > \lim \Phi(u_1, \ldots, u_n) = \bar{w} \tag{13}$$

im Widerspruch mit der Definition von $\bar{w}$.

Es folgt also, daß für $r \leqq p$ alle $\bar{u}_r = 0$ sein müssen, für die mindestens ein $k_{rs} > 0$ ist.

Bei der Approximation von $\bar{\mathfrak{q}}$ durch $\mathfrak{q}$ strebt dann $\Phi_{1,2}$ gegen 1, da hier nur solche u_r mit $k_{rs} > 0$, für die $\bar{u}_r = 0$ wird, wirklich auftreten. Demnach wird $\bar{w}$ von Φ dann und nur dann approximiert, wenn $\Phi_1(u_r)$ und $\Phi_2(u_s)$ *unabhängig voneinander möglichst groß* werden.

Um also die verhältnismäßigen Spielstärken der Spieler einer Klasse untereinander zu ermitteln, genügt es, unseren Ansatz auf das Teilturnier anzuwenden, welches aus dem Gesamtturnier durch Beschränkung auf die Spieler dieser einen Klasse entsteht.

Damit wird unser Problem auf solche mit kleinerer Spielerzahl zurückgeführt, die wieder entsprechenden Reduktionen unterliegen, bis man schließlich zu „irreduziblen" Problemen gelangt, für die dann alle $\bar{u}_r > 0$ sind

und daher die durch Gleichung (8) ausgedrückte Lösung des Falles 1 Gültigkeit hat.

Wir zeigen zunächst, daß die Zerlegung des „Gesamtturniers“ T in „irreduzible“ Teilturniere oder „*Primturniere*“ $C_1, C_2, C_3, \ldots$ *eindeutig* ist. Die einem solchen „Primturnier“ angehörende Spielergruppe C ist nämlich charakterisiert durch die Eigenschaft, daß alle übrigen zu T gehörenden Spieler in zwei Gruppen P und Q zerfallen,

$$T = P + C + Q, \tag{14}$$

wobei *kein* Spieler von P gegen einen von C oder Q und *kein* Spieler von C gegen einen von Q eine Partie gewinnt, während *innerhalb* C *keine* Einteilung in zwei Klassen C', C'' von der angegebenen Beschaffenheit möglich ist. Ist nun

$$T = T' + T''$$

irgendeine Klasseneinteilung des Gesamtturniers, bei der kein Spieler von T' gegen einen von T'' gewinnt, so zerfallen dabei auch P und Q in je zwei Klassen

$$P = P' + P'', \qquad Q = Q' + Q'',$$

wo P' nnd Q' zu T', P'' und Q'' zu T'' gehören, während C *ganz* zu T' oder ganz zu T'' gehört, da sonst

$$C = C' + C''$$

zerlegbar wäre gegen die Annahme. Wird also bei fortgesetzter Zerlegung des Turniers immer derjenige Bestandteil weiter zerlegt, der mit C auch nur ein Element gemein hat, so muß der schließlich übrigbleibende unzerlegbare Rest C^* das ganze C enthalten, und ebenso umgekehrt C wieder C^*, d. h. $C = C^*$, und die Zerlegung (in Primturniere) ist somit *eindeutig*.

Ist C_1 irgendein von C verschiedenes Primturnier, so liegt es entweder *ganz* in P oder *ganz* in Q, da es sonst zerlegbar wäre, oder *beliebig* in einem von beiden, sofern nämlich C und C_1 gar nicht miteinander gespielt haben.

§ 2.

Die eindeutige Lösung des irreduziblen Problems.

Wir beschränken uns zunächst auf den „irreduziblen“ Fall, setzen also voraus, daß eine Einteilung aller Spieler in zwei Klassen *unmöglich* ist, bei der kein Spieler A_r der Unterklasse gegen einen A_s der Oberklasse auch nur eine Partie gewinnt, bei der also für jede solche Kombination r, s immer $g_{rs} = 0$ wäre. Dann kann, wie aus den Betrachtungen des § 1

hervorgeht, bei *keiner* Approximation der oberen Grenze $\bar{w}$ irgendeiner der Quotienten $\frac{u_r}{u_s}$ sich der Null nähern (wobei einige, aber nicht alle $\bar{u}_r = 0$ würden), sondern es kann nur einer der Fälle 1 und 2 vorliegen, wo $\bar{w}$ als das *wahre Maximum* der Funktion Φ für ein System *positiver* Werte $u_t = \bar{u}_t > 0$ tatsächlich angenommen wird. Für solche Werte u_t gelten also auch die Gleichungen (8), die wir jetzt in der Form schreiben:

$$(8a) \qquad \sum_t{}' k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t} = g_r \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

und die *Existenz* einer *positiven* Lösung $u_r = \bar{u}_r > 0$ ist für den „irreduziblen" Fall damit bewiesen.

Um aber auch die *Eindeutigkeit* dieser Lösung zu zeigen, bedienen wir uns einer leicht herleitbaren Hilfsformel. Durch Summation der Gleichungen (8a) über $r = 1, 2, \ldots, p$, wo $1 \leqq p \leqq n$ ist, erhalten wir nämlich unter Berücksichtigung der Identität

$$k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t} + k_{tr} \frac{u_t}{u_t + u_r} = k_{rt} = k_{tr}$$

die Formel

$$(15) \qquad \sum_{r=1}^{p} \sum_{t=p+1}^{n} k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t} = \sum_{r=1}^{p} g_r - \sum_{1 \leqq r,t \leqq p}{}' k_{rt} - G_p - K_p = \gamma_p \geqq 0,$$

in der die rechte Seite den Überschuß γ_p der von den Spielern $A_1, A_2, \ldots, A_p$ überhaupt erzielten Gewinne über die Anzahl K_p der zwischen ihnen gespielten Partien, also die Anzahl der von ihnen gegen die *übrigen* Spieler A_s gewonnenen Partien ausdrückt, die im „irreduziblen" Falle, wo eine Klasseneinteilung mit $g_{rs} = 0$ ausgeschlossen ist, immer *positiv* ausfällt.

Angenommen nun, es seien u_t und u_t' zwei *wesentlich verschiedene* positive Lösungen des homogenen Gleichungssystems (8a), d. h. solche, die sich nicht nur durch einen gemeinsamen Multiplikator ϱ unterscheiden, so können wir sie beide gleichzeitig auf die Summe 1 normiert denken

$$(16) \qquad \sum_{t=1}^{n} u_t = \sum_{t=1}^{n} u_t' = 1$$

und die Reihenfolge der u_t so wählen, daß die ersten p dieser Größen *kleiner*, alle übrigen aber größer oder gleich den entsprechenden Werten u_t' ausfallen, also

$$(17) \qquad u_r < u_r' \quad \text{und} \quad u_s \geqq u_s' \quad \text{für} \quad 1 \leqq r \leqq p < s \leqq n$$

wird. Dann folgt für jede solche Kombination r, s

$$(17a) \qquad \frac{u_r}{u_s} < \frac{u_r'}{u_s'}$$

sowie

$$\frac{u_r}{u_r+u_s} < \frac{u_r'}{u_r'+u_s'} \tag{17b}$$

und daher auch

$$\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{n} k_{rs}\frac{u_r}{u_r+u_s} < \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{n} k_{rs}\frac{u_r'}{u_r'+u_s'} \tag{18}$$

im Widerspruch mit (15), sofern auch nur *eine* der Zahlen $k_{rs} > 0$ ist, d. h. sofern die Spieler A_r mit den andern A_s überhaupt gespielt haben, was wegen $k_{rs} \geqq g_{rs} > 0$ im irreduziblen Falle immer zutrifft.

Durch die Gleichungen (8a) sind also im betrachteten Falle die *Verhältnisse* der (positiven) Größen u_t *eindeutig* bestimmt und *jede* positive Lösung des Gleichungssystems muß als die *einzige* Lösung des *irreduziblen* Problems auch das Maximum $\bar{w}$ der durch (3) definierten Funktion $\Phi(u)$ liefern.

Mit Hilfe der Formel (15) läßt sich aber noch eine wichtige Eigenschaft unseres Lösungssystems herleiten. Wir betrachten wieder zwei verschiedene positive Lösungen u_t und u_t' der Gleichungen (8a), die wir uns gleichfalls gemäß (16) normiert denken, die aber zu zwei *verschiedenen* Verteilungen der Gewinnzahlen g_t und g_t', d. h. zu verschiedenen Turnier-Ergebnissen gehören mögen. Auch hier denken wir uns wieder die Reihenfolge so gewählt, daß für $r \leqq p < s$ die Beziehungen (17), (17a) und (17b) gelten[6]). Dann erhalten wir, da nach unserer Annahme immer $k_{rt} = k_{rt}'$ die Anzahl der gespielten Partien beidemal die gleiche sein soll, wieder die Ungleichheit (18) und somit auch wegen (15)

$$G_p = g_1 + g_2 + \ldots + g_p < g_1' + g_2' + \ldots + g_p' = G_p'. \tag{19}$$

Es muß also bei jedem Übergang von einem Turnier-Ergebnis g_{rt} zum andern g_{rt}' die Gesamtsumme aller Gewinne für diejenige Spielergruppe A_r wachsen, deren normierte Spielstärken u_r zunehmen. Angenommen nun, bei einem solchen Übergange sei g_q die *einzige* zunehmende $g_q < g_q'$, während sonst immer $g_t \geqq g_t'$ sein soll. Dann muß g_q notwendig in der Teilsumme G_p vorkommen, d. h. $q \leqq p$ und $u_q < u_q'$ sein und *die relative (normierte) Spielstärke eines Spielers A_r wird dadurch notwendig vergrößert, daß er bei sonst ungeänderten Ergebnissen eine einzelne Partie gewinnt, anstatt sie zu verlieren*[7]).

[6]) Den Fall, wo alle $u_t = u_t'$ sind, können wir ausschließen, weil wegen (8a) sonst auch alle $g_t = g_t'$ wären, gegen die Annahme.

[7]) Die Wichtigkeit dieser an eine brauchbare Bewertungsmethode zu stellenden Forderung betont E. Landau a. a. O. § 3, wo er auch zeigt, daß sie in den von ihm behandelten bisherigen Lösungsversuchen des Problems nicht durchweg erfüllt ist.

§ 3.

Die Lösung des allgemeinen Problems.

Nachdem für den „irreduziblen" Fall die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung erwiesen ist, handelt es sich nun um die Frage, was sich daraus für den allgemeinen Fall ergibt. In § 1 haben wir gesehen, wie das Gesamtturnier T *eindeutig* in irreduzible Teilturniere $C_1, C_2, \ldots$ zerlegt werden kann. Für die Spieler jedes solchen „Primturniers" C sind also nach § 2 die gesuchten „Spielstärken" als Verhältnisse positiver Zahlen bestimmt. Es seien C_1, C_2 zwei verschiedene irreduzible Teilturniere derart, daß kein Spieler von C_1 gegen einen von C_2 gewonnen, aber wenigstens einer A_r von C_1 mit einem A_s von C_2 gespielt (und also verloren) hat. Dann muß, wie wir § 1 gezeigt haben, die Spielstärke von A_r im Verhältnis zu der von A_s verschwinden, und das gleiche muß auch für *alle* Spieler von C_1 gegenüber *allen* von C_2 gelten, da die Quotienten der Spielstärken in jedem irreduziblen Teilturnier endlich und von 0 verschieden sind. Wir schreiben dann $C_1 < C_2$.

Ist nun

$$T = P + C_1 + Q \tag{20}$$

die für das Primturnier C_1 charakteristische Zerlegung des Gesamtturniers von der Form (14), und ist $C_1 < C_2$, wobei Spieler von C_1 mit solchen von C_2 wirklich gespielt (und verloren) haben, so muß C_2 in Q enthalten sein, da keiner von P gegen einen von C_1 gewonnen hat. Ist $C_2 < C_3$ im Sinne unserer Definition, so kann C_3 nicht in P enthalten sein, weil *kein* Spieler von P gegen einen von $Q = C_2 + Q'$ gewonnen hat und doch C_3 gegen C_2 gewonnen haben soll. Vielmehr liegt C_3 ganz in Q', also in Q, und kein Spieler von C_1 kann gegen einen von C_3 gewonnen haben. Bildet man weiter von C_1 ausgehend eine Kette von Primturnieren $C_1, C_2, \ldots, C_t$, für die sukzessive

$$C_1 < C_2,\ C_2 < C_3,\ \ldots,\ C_{t-1} < C_t$$

sein möge, derart, daß jedes gegen das nachfolgende gespielt und verloren hat, so ergibt sich durch vollständige Induktion, daß *alle* auf C_1 folgenden in Q enthalten sind, also kein Spieler von C_1 gegen einen von C_t gewonnen haben und mithin sicher *nicht* $C_t < C_1$ sein kann. Da also zyklische Ketten dieser Art ausgeschlossen sind, so kann man festsetzen, daß jedesmal, wo $C_i < C_k$ und $C_k < C_l$ ist, auch $C_i < C_l$ sein soll, ohne daß bei dieser erweiterten Definition jemals *gleichzeitig* $C_i < C_k$ und $C_k < C_i$ werden könnte. Durch diese Festsetzung wird also die Menge der „primitiven Teilturniere" oder „Primturniere" C_i im Sinne von

Hausdorff[8]) „teilweise geordnet", und jedesmal, wo $C_i < C_k$ ist, muß bei der Approximation der oberen Grenze $\bar{w}$ jeder Quotient u_r/u_s, wo der Spieler A_r zu C_i und A_s zu C_k gehört, nach Null konvergieren, d. h. alle Spieler von C_i sind unendlich gering zu bewerten gegen alle von C_k. „Vergleichbar" in dem Sinne, daß entweder $C_i < C_k$ oder $C_k < C_i$ ausfällt, sind also zwei primitive Teilturniere C_i und C_k einmal dann, wenn zwischen ihnen überhaupt Spiele stattgefunden haben, weiter aber auch in dem Falle, wo zwischen ihnen eine lückenlose Kette von primitiven Teilturnieren $C_1, C_2, \ldots$ eingeschaltet werden kann, in welcher je zwei aufeinanderfolgende miteinander gespielt und jedes gegen das vorangehende gewonnen haben:

$$C_1 < C_2 < C_3 < \ldots < C_t.$$

Als „*unvergleichbar*" gelten dagegen nur solche Paare von primitiven Teilturnieren, für die eine solche Kette nicht existiert. So wären z. B. im Falle dreier Primturniere C_1, C_2, C_3 die beiden ersten miteinander unvergleichbar, wenn sie beide gegen C_3 gespielt und gewonnen oder *beide* gegen C_3 verloren, aber unter sich gar nicht gespielt haben sollten. Von dem so charakterisierten Falle der „Unvergleichbarkeit" abgesehen, der durch die Natur der Sache gegeben ist, liefert uns aber unser Wahrscheinlichkeitsansatz stets eine eindeutig bestimmte Lösung.

Wir beweisen nämlich folgenden

Satz. *Im allgemeinsten Falle eines in die irreduziblen Teilturniere $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ zerfallenden Turnieres T wird die obere Grenze $\bar{w}$ der Turnier-Wahrscheinlichkeit $\Phi(u)$ approximiert, indem man* 1. *die verhältnismäßigen Spielstärken $u_r : u_t$ der zu jedem Primturnier C_i gehörenden Spieler so wählt, daß die auf C_i bezogene Teilfunktion $\Phi_i(u)$, also die Wahrscheinlichkeit des auf C_i beschränkten Teilergebnisses, ihren Maximalwert $\bar{w}_i$ annimmt, und* 2. *für je zwei Primturniere C_i und C_j, welche der Bedingung $C_i < C_j$ genügen, alle Quotienten u_r/u_s der Spielstärken eines Spielers A_r aus C_i und eines Spielers A_s aus C_j nach Null abnehmen läßt.*

Zum Beweise benutzen wir die Tatsache, daß jeder Faktor des Produktes $\Phi(u)$ von der Form ist:

$$w_{rs} = \frac{u_r^{g_{rs}} u_s^{g_{sr}}}{(u_r + u_s)^{k_{rs}}}, \tag{2}$$

wobei die entsprechenden Spieler A_r und A_s höchstens *zwei* verschiedenen Primturnieren C_i und C_j angehören können. Faßt man nun alle diejenigen Faktoren w_{rs} zu einem Teilprodukte $\Phi_i(u)$ zusammen, für welche beide

[8]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Kap. VI, § 1.

Spieler *demselben* Primturniere C_i angehören, so erhält man genau die Wahrscheinlichkeit w_i für das auf C_i bezogene Teilergebnis, und diese besitzt dann, weil C_i irreduzibel ist, bei geeigneter Wahl der in Φ_i vorkommenden relativen Spielstärken $u_r : u_s$ ein wahres Maximum $\Phi_i(u) = \overline{w}_i$.

Außerdem enthält aber $\Phi(u)$ noch solche Faktoren w_{rs}, für welche die Spieler A_r und A_s zwei *verschiedenen* Primturnieren C_i und C_j angehören. Faßt man also für jede Kombination i, j die entsprechenden Faktoren w_{rs} wieder zu einem Teilprodukte $\Phi_{ij}(u)$ zusammen, so ergibt sich für die Gesamtfunktion folgende Zerlegung:

$$\Phi(u) = \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u) \cdot \prod_{i,j}^{i \neq j} \Phi_{ij}(u). \tag{21}$$

Ist nun $u_t = \overline{u}_t$ irgendeine, etwa die auf die Summe $\Sigma_t \overline{u}_t = 1$ der vorkommenden Variablen normierte Lösung des auf das i-te Primturnier C_i reduzierten Maximumsproblems

$$\Phi_i(\overline{u}) = \overline{w}_i \geqq \Phi_i(u),$$

so entsteht die allgemeinste Lösung desselben Teilproblems durch Hinzufügung eines beliebigen positiven Faktors ϱ_i, da auch $\Phi_i(u)$ in bezug auf die vorkommenden u_t wieder homogen von 0-ter Dimension ist:

$$\Phi_i(\varrho_i \overline{u}) = \Phi_i(\overline{u}) = \overline{w}_i.$$

Für ein beliebiges System der ϱ_i wird also das über $i = 1, 2, \ldots, m$ gewonnene einfache Produkt in (21) durch den Ansatz $u_t = \varrho_i \overline{u}_t$ seinen Maximalwert $\overline{w}_1 \overline{w}_2 \ldots \overline{w}_n$ erreichen:

$$\prod_{i=1}^{m} \Phi_i(\varrho_i \overline{u}) = \overline{w}_1 \overline{w}_2 \ldots \overline{w}_m = w^* \geqq \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u), \tag{22}$$

während das über i, j genommene Doppelprodukt in (21) durch Wahl der Multiplikatoren ϱ_i, wie wir zeigen wollen, seiner oberen Grenze 1 beliebig genähert werden kann. Ist nämlich $\Phi_{ij}(u)$ ein Faktor dieses Produktes, so sind nur folgende drei Fälle möglich:

1. Zwischen C_i und C_j ist überhaupt nicht gespielt worden, alle $k_{rs} = 0$, wenn A_r und A_s zu C_i bzw. C_j gehören, dann sind auch die entsprechenden g_{rs} und g_{sr} sämtlich $= 0$ und die Funktion $\Phi_{ij}(u)$ reduziert sich auf den konstanten Wert 1. Solche Faktoren Φ_{ij} können also ganz außer Betracht bleiben.

2. Mindestens ein Spieler A_r von C_i hat gegen einen A_s von C_j gespielt und *verloren*. Dann muß in der durch C_i gemäß (14) bestimmten Zerlegung

$$S = P_i + C_i + Q_i$$

C_j notwendig in Q_i enthalten sein, d. h. alle $g_{rs} = 0$, sofern A_r zu C_i und A_s zu C_j gehört, und $C_i < C_j$ in der im Anfang des § eingeführten Schreibweise. Dann erscheinen aber alle Variablen u_r, die zu C_i gehören, ausschließlich im *Nenner* von $\Phi_{ij}(u)$, und der Ausdruck

$$\Phi_{ij}(u) = \prod_{r,s} \frac{u_s^{g_{sr}}}{(u_r + u_s)^{k_{rs}}} = \prod_{r,s} \left(\frac{u_s}{u_r + u_s}\right)^{k_{rs}} \tag{23}$$

wird nach der Substitution $u_r = \varrho_i \bar{u}_r$, $u_s = \varrho_j \bar{u}_s$, wo r alle auf C_i und s alle auf C_j bezüglichen Indizes durchläuft,

$$\Phi_{ij}(u) = \prod_{r,s} \left(\frac{\lambda_j \bar{u}_s}{\lambda_i \bar{u}_r + \lambda_j \bar{u}_s}\right)^{k_{rs}} = \prod_{r,s} \left(\frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_s + \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \bar{u}_r}\right)^{k_{rs}}, \tag{24}$$

sich seiner oberen Grenze 1 nähern, wenn der Quotient $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ der Grenze 0 zustrebt.

3. Mindestens ein Spieler A_r von C_i hat gegen einen A_s von C_j *gewonnen*, $g_{rs} > 0$. Dann gehört C_j notwendig zu P_i und alle $g_{sr} = 0$, sowie $C_j < C_i$. Hier gilt wieder das gleiche für C_j und C_i wie im Fall 2 für C_i und C_j, und die Funktion $\Phi_{ij}(u) = \Phi_{ij}(\lambda_i \bar{u}, \lambda_j \bar{u})$ nähert sich der Eins, wenn der Quotient $\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ der Null zustrebt.

Sind nun $\Phi_{ij}(u)$ und $\Phi_{jl}(u)$ zwei (nicht konstante) Faktoren von $\Phi(u)$, für welche gleichzeitig $C_i < C_j$ und $C_j < C_l$ ausfällt, so daß Spieler von C_i gegen solche von C_j, sowie Spieler von C_j gegen solche von C_l gespielt und verloren haben, so werden *beide* Funktionen Φ_{ij} und Φ_{jl} sich der Grenze 1 nähern, wenn gleichzeitig die beiden Quotienten

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_j}, \frac{\varrho_j}{\varrho_l} \quad \text{und damit auch ihr Produkt} \quad \frac{\varrho_i}{\varrho_l}$$

der Null zustrebt, und das Analoge gilt für jede Kette von Primturnieren, für welche der Reihe nach

$$C_i < C_j < C_l < \ldots < C_z$$

ist und von denen je zwei aufeinanderfolgende gegeneinander gespielt haben. Daraus ergibt sich aber, daß auch nach unserer allgemeinen Festsetzung *jedesmal*, wo $C_i < C_j$ ist, auch der Quotient $\frac{\varrho_i}{\varrho_j}$ bei der betrachteten Approximation sich der Null nähert. Da nun diese „teilweise Ordnung" der Primturniere, wie wir S. 445—446 gesehen haben, widerspruchsfrei möglich ist, so können wir durch Befolgung dieser Regel

$$\lim \frac{\varrho_i}{\varrho_j} = 0 \quad \text{für} \quad C_i < C_j$$

gleichzeitig *alle* in (21) vorkommenden Faktoren $\Phi_{ij}(u)$ und damit auch ihr Produkt sich der Eins nähern lassen und erhalten demgemäß

$$\lim \Phi(\varrho_i \bar{u}_t) \begin{cases} = \bar{w}_1 \bar{w}_2 \dots \bar{w}_m \lim \prod_{i,j} \Phi_{ij}(\varrho_i \bar{u}_r, \varrho_j \bar{u}_s), \\ = \bar{w}_1 \bar{w}_2 \dots \bar{w}_m \geqq \prod_i \Phi_i(u) \geqq \Phi(u), \end{cases} \tag{25}$$

d. h. es ist $w^* = \bar{w}$ in der Tat die obere Grenze von $\Phi(u)$, die wir auf diese Weise approximieren.

§ 4.

Diskussion der Lösung für reguläre Turniere.

In dem praktisch wichtigen Fall, den wir als den „regulären" bezeichnen wollen, wo alle

$$k_{rs} = k$$

einander gleich sind, wo also jeder Spieler mit jedem die gleiche Anzahl Partien gespielt hat, geht (8a) über in

$$g_r^* \equiv \frac{g_r}{k} = u_r \sum_{t=1}^{n}{}' \frac{1}{u_r + u_t} \quad \text{für} \quad r = 1, \dots, n \geqq 2. \tag{8b}$$

Sind in der Reihe $u_1, \dots, u_n$ zwei Größen einander gleich: $u_r = u_s$, so muß auch

$$g_r = g_s$$

sein; ist aber

$$u_r < u_s, \tag{26}$$

so ist auch

$$\frac{1}{u_r + u_t} > \frac{1}{u_s + u_t} \tag{27}$$

für alle $r \neq t \neq s$ und

$$\frac{u_r}{u_r + u_t} < \frac{u_s}{u_s + u_t}, \tag{28}$$

also

$$g_r < g_s,$$

aber, sofern $n > 2$ ist,

$$\frac{g_r}{u_r} > \frac{g_s}{u_s}$$

oder

$$\frac{u_r}{u_s} < \frac{g_r}{g_s} < 1. \tag{29}$$

Umgekehrt folgt aus $g_r \leqq g_s$ wieder $u_r \leqq u_s$.

Wir haben also den

Satz. *Bei einem Turnier, in welchem jeder Spieler mit jedem die gleiche Anzahl Partien spielt, haben — im irreduziblen Falle — die be-*

zeichneten Spielstärken u_t dieselbe Reihenfolge wie die Gewinnzahlen g_t, aber für $n > 2$ in quantitativ größeren Abstandsverhältnissen.

In unserem Falle $k_{rs} = k$ wird, wenn man die g_r (und damit zugleich die u_r) nach ansteigender Größe ordnet,

$$1 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq \cdots \leqq g_n,$$

jede p-te Teilsumme

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

wegen (15) größer ausfallen als die entsprechende Teilsumme K_p

$$(30) \qquad G_p = g_1 + g_2 + \ldots + g_p > K_p = \sum_{1 \leqq r,t \leqq p}{}' k_{rt} = k\frac{p(p-1)}{2},$$

und nur für $p = n$ ergibt sich

$$(7\,a) \qquad g_1 + g_2 + \ldots + g_n = k\frac{n(n-1)}{2} = N.$$

Durch Zerlegung der ganzen Zahl N in n Summanden erhält man also alle im betrachteten Falle möglichen durch die Gewinnzahlen g_t ausdrückbaren Turnier-Ergebnisse.

So haben wir z. B. im Falle $k = 1, n = 2, N = 1 = 0 + 1$ nur eine einzige mögliche Verteilung

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 1,$$

die dem „reduziblen" Falle angehört und der Bewertung $\frac{u_1}{u_2} = 0$ entspricht.

Für $k = 2, n = 2, N = 2 = 0 + 2 = 1 + 1$ noch die irreduzible Verteilung $g_1 = g_2 = 1, u_1 = u_2$.

Für $k = 3, n = 2, N = 3 = 1 + 2$ ergibt sich die irreduzible Verteilung $g_1 = 1, g_2 = 2$ mit den zugehörigen Bestimmungsgleichungen (8)

$$\frac{3u_1}{u_1 + u_2} = 1, \qquad \frac{3u_2}{u_1 + u_2} = 2$$

und dem Ergebnis $u_1 : u_2 = 1 : 2$.

Allgemein ist für $n = 2, N = k = g_1 + g_2$

$$g_1 = k\frac{u_1}{u_1 + u_2}, \qquad g_2 = k\frac{u_2}{u_1 + u_2},$$

also $u_1 : u_2 = g_1 : g_2$, d. h. die berechneten Spielstärken verhalten sich wie die Gewinnzahlen, während für $n > 2$ nach (29) für $r < s$ immer

$$\frac{u_r}{u_s} < \frac{g_r}{g_s} < 1$$

ausfällt.

Für $n = 3, k = 1, N = 3 = g_1 + g_2 + g_3 = 1 + 1 + 1$ haben wir nur einen einzigen irreduziblen Typus

$$g_1 = g_2 = g_3 = 1, \qquad u_1 = u_2 = u_3,$$

während dem Falle $n = 3$, $k = 2$, $N = 6$ die drei Zerlegungen

$$6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$$

und damit drei verschiedene Verteilungen und Bewertungen entsprechen. Von diesen ist aber die erste *reduzibel* wegen $g_1 + g_2 - 2 = 2^{\frac{2(2-1)}{2}}$ entsprechend der Matrix $g_{12} = g_{21} = 1$, $g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{31} = g_{32} = 2$, und würde sich auch ergeben, wenn jeder mit jedem nur *eine* Partie gespielt und dabei die beiden ersten miteinander Remis gemacht und gegen den dritten verloren hätten. Es bleibt also außer dem trivialen Typus $g_1 = g_2 = g_3$, $u_1 = u_2 = u_3$ nur noch *ein* irreduzibler übrig $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$. Hier ergeben sich, wenn man

$$\frac{u_1}{u_3} = x, \qquad \frac{u_2}{u_3} = y$$

setzt, für x und y die Gleichungen

$$\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+1} = 1,$$

und hieraus weiter

$$x = y^2, \qquad 1 - y + y^2 + 3y^3.$$

Die kubische Gleichung hat als einzige positive Lösung

$$y = 0{,}46940, \qquad x = y^2 = 0{,}22034,$$

woraus sich, auf die Summe 1 normiert, als Spielstärken ergeben

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}1304, \quad g_1 = 1 = \quad 1 + 0 \quad = \quad 0 + 1, \\ u_2 &= 0{,}2778, \quad g_2 = 2 = 1 \quad\quad + 1 = 2 \quad\quad + 0, \\ u_3 &= 0{,}5918, \quad g_3 = 3 = 2 + 1 \quad\quad = 1 + 2. \end{aligned}$$

Diese Verteilung ergibt sich insbesondere, wenn jeder der 3 Spieler mit jedem anderen je *eine* Partie gespielt hat und dabei

1. A_1 gegen A_2 Remis gemacht und gegen A_3 verloren, A_2 gegen A_3 Remis gemacht,

oder

2. A_1 gegen A_2 verloren und gegen A_3 Remis gemacht, A_2 gegen A_3 verloren hat.

Für $n = 4$, $k = 1$ haben wir wieder nur eine einzige „irreduzible" Verteilung entsprechend der Zerlegung

$$N = 6 = 1 + 1 + 2 + 2$$

mit dem Ergebnis

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : 1 : 3 : 3.$$

Für $n = 4$, $k = 2$ dagegen ergeben sich bereits 7 irreduzible Verteilungen:

$$\begin{aligned} N = 12 &= 1 + 2 + 4 + 5 \\ &= 1 + 3 + 3 + 5 \\ &= 1 + 3 + 4 + 4 \\ &= 2 + 2 + 3 + 5 \\ &= 2 + 2 + 4 + 4 \\ &= 2 + 3 + 3 + 4 \\ &= 3 + 3 + 3 + 3, \end{aligned}$$

welche mit Ausnahme der letzten (mit der trivialen Lösung $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$) auf Gleichungen dritten und höheren Grades führen. Die zweite z. B. liefert:

$$\frac{u_1}{u_4} = x = y^2, \qquad \frac{u_2}{u_4} = \frac{u_3}{u_4} = y, \qquad 5y^3 + y^2 + 3y - 1 = 0.$$

Für $n = 5$, $k = 1$ erhalten wir 3 irreduzible Zerlegungen

$$\begin{aligned} N = 10 &= 1 + 1 + 2 + 3 + 3 \\ &= 1 + 2 + 2 + 2 + 3 \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2, \end{aligned}$$

von denen die beiden ersten wieder auf kubische Gleichungen führen.

Die Tatsache, daß für $k_{rs} = k$ die Spielstärken u_t gleichgeordnet sind den entsprechenden Gewinnzahlen g_t, gilt aber auch im *reduziblen* Falle. Haben wir nämlich eine Klasseneinteilung aller Spieler in solche A_r und A_s, daß für $1 \leqq r \leqq p < s \leqq r$ immer $g_{rs} = 0$ wird, so gilt für jedes g_r und jedes g_s

$$g_r \leqq k(p-1) < kp \leqq g_s, \tag{31}$$

da ein Spieler A_r der ersten Klasse höchstens gegen $p-1$ Spieler derselben Klasse je k Partien und andererseits jeder Spieler A_s der zweiten Klasse mindestens kp Partien gegen alle der ersten Klasse gewinnt. Jede Gewinnzahl der unteren Klasse ist also kleiner als jede der oberen, während gleichzeitig jede zur unteren Klasse gehörende Spielstärke u_r gegen jede zur oberen gehörende u_s verschwindet. In dem hier betrachteten Falle erfolgt also, wenn man die g_r nach aufsteigender Größe ordnet, jede Klassentrennung immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden g_p, g_{p+1} und zwar immer an der Stelle, wo

$$G_p = g_1 + g_2 + \ldots + g_p = k\frac{p(p-1)}{2} = k + 2k + \ldots + (p-1)k \tag{32}$$

ausfällt, während wegen (30) sonst immer

$$G_p = g_1 + g_2 + \ldots + g_p > k\frac{p(p-1)}{2}$$

sein muß. Es genügt also, die sukzessiven Teilsummen der nach der Größe geordneten Gewinnzahlen $g_1 \leqq g_2 \leqq g_3 \leqq \cdots \leqq g_n$ mit den entsprechenden Teilsummen der Reihe $0, k, 2k, \ldots, (n-1)k$ zu vergleichen, um sofort die vollständige Zerlegung in „Primturniere“ zu erhalten.

§ 5.

Die numerische Auflösung der Gleichungen durch sukzessive Approximation.

Für größere Werte von n, wo die Berechnung durch algebraische Elimination nicht mehr angängig ist, empfiehlt sich ein Approximationsverfahren, das, wie wir zeigen wollen, im irreduziblen Falle stets zum Ziele führt.

Da wir die Gleichungen (8) des Problems zur Berechnung der jetzt einfach mit u_r bezeichneten relativen Spielstärken $\bar{u}_r$ in der Form schreiben können

$$\frac{g_r}{u_r} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{u_r + u_t} \qquad \begin{pmatrix} r, t = 1, 2, \ldots, n \\ t \neq r \end{pmatrix}, \tag{8}'$$

so liegt es nahe, gegebene (positive) Annäherungswerte x_r der u_r sukzessive zu verbessern, indem wir setzen

$$\frac{g_r}{x_r'} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{x_r + x_t} = \frac{g_r}{f_r(x)}, \quad \text{also} \quad x_r' = f_r(x) \tag{33}$$

und so von einem System (x_r) der Reihe nach übergehen zu weiteren Systemen $(x_r'), (x_r''), \ldots, (x_r^{(i)})$, die im Falle der Konvergenz die gesuchte Lösung liefern werden. Denn ist etwa

$$\bar{x}_r = \lim_{i \to \infty} x_r^{(i)} \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

so ergibt sich aus (33) analog

$$\frac{g_r}{x_r^{(i+1)}} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{x_r^{(i)} + x_t^{(i)}} \tag{33}_i$$

und durch Grenzübergang

$$\frac{g_r}{\bar{x}_r} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{\bar{x}_r + \bar{x}_t}, \tag{34}$$

d. h. die Grenzwerte $\bar{x}_r$ bilden ein Lösungssystem von (8).

Um die tatsächliche Konvergenz im irreduziblen Falle unseres Problems zu beweisen, behandeln wir ein allgemeineres Iterationsproblem, dessen Voraussetzungen, wie leicht zu zeigen, in unserem Falle zutreffen.

Theorem. *Es sei gegeben eine Substitution von n Variablen x_r in der Form*

$$x_r' = f_r(x) \equiv f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

wo die (reellen) Funktionen f_r folgende Eigenschaften besitzen:

1. *Die Funktionen f_r sind homogen von der Dimension 1, d. h. es ist für jedes (positive) λ stets*

$$f_r(\lambda x) = \lambda f_r(x). \tag{36}$$

2. *Die Funktionen sind „positiv beschränkt", d. h. ihre Funktionswerte liegen zwischen positiven (von 0 verschiedenen) endlichen Schranken in jedem Variabilitätsbereiche, in welchem die sämtlichen Variablen x_r selbst zwischen positiven endlichen Schranken gelegen sind.*

3. *Die Funktionen f_r sind stetig differentiierbar und auch ihre sämtlichen partiellen Ableitungen $f_{rs}(x) = \frac{\partial}{\partial x_s} f_r(x)$ sind „positiv beschränkte" Funktionen, soweit die Variablen x_s „wirklich vorkommen", d. h. die Ableitungen f_{rs} nicht identisch verschwinden. Die Funktionen f_r sind also in den wirklich vorkommenden Variablen x_s auch monoton.*

4. *Jede der Funktionen f_r enthält „eigentlich" die ihr entsprechende Variable x_r, so daß $f_{rr} \neq 0$ ist in jedem positiven Bereiche der Veränderlichen; und bei jeder Einteilung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in zwei Klassen (r, s) gibt es immer mindestens ein Zahlenpaar r, s, wo r der einen und s der anderen angehört, für welches $f_{rs} \neq 0$ ist.*

5. *Die Gleichungen*

$$u_r = f_r(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

besitzen mindestens eine positive Lösung $u_r > 0$.

Dann konvergieren für jedes positive System von Werten $x_r > 0$ die sukzessive gebildeten Werte

$$x_r' = f_r(x), \quad x_r'' = f_r(x'), \quad \ldots, \quad x_r^{(i+1)} = f_r(x^{(i)}), \ldots \tag{35}_i$$

mit wachsendem i nach positiven Grenzwerten

$$\bar{x}_r = \lim_{i \to \infty} x_r^{(i)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

welche dem Gleichungssystem (37) genügen und sich von den vorausgesetzten Lösungen u_r höchstens durch einen gemeinsamen positiven Faktor unterscheiden

$$\bar{x}_r = \lambda^* u_r, \tag{39}$$

wodurch zugleich die Eindeutigkeit der positiven Lösung gesichert ist.

Bevor wir dieses allgemeine Theorem beweisen, überzeugen wir uns zunächst, daß die über die Funktionen f_r gemachten Voraussetzungen für den von uns behandelten speziellen Fall auch erfüllt sind.

1. Die Homogeneität erhellt unmittelbar aus der Form der Gleichungen (8).

2. Im „irreduziblen" Falle sind nach § 1 alle $g_r > 0$ und für jedes r mindestens ein $k_{rt} > 0$, und die Funktionen f_r sind also nicht verschwindende rationale Funktionen mit lauter *positiven* Koeffizienten. Solche Funktionen sind aber immer „positiv beschränkt", weil, wie leicht ersichtlich, die Summe, das Produkt und der Quotient „positiv beschränkter" stets wieder die gleiche Eigenschaft besitzen. Allgemein sind weiter alle positiv beschränkten Funktionen von positiv beschränkten Funktionen wieder positiv beschränkt.

3. Durch partielle Differentiation ergibt sich aus (33)

$$g_r \frac{\partial f_r(x)}{\partial x_r} = f_r(x)^2 \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{(x_r + x_t)^2} \tag{40}$$

und

$$g_r \frac{\partial f_r(x)}{\partial x_s} = f_r(x)^2 \frac{k_{rs}}{(x_r + x_s)^2} \quad \text{für} \quad s \neq r; \tag{41}$$

also sind auch hier alle $f_{rs}(x)$, soweit sie nicht identisch verschwinden, stetige und „positiv beschränkte" Funktionen.

4. Aus den letzten Formeln ergibt sich unmittelbar, daß stets $f_{rr}(x) > 0$ und $f_{rs}(x) = 0$ nur im Falle $k_{rs} = 0$, wo der r-te Spieler mit dem s-ten überhaupt nicht gespielt hat. Gäbe es nun eine Klasseneinteilung in Spieler A_r und A_s, bei welcher alle $k_{rs} = 0$ wären, so wären auch alle $g_{rs} = 0$, was im „irreduziblen" Falle ausgeschlossen ist.

5. Die *Existenz* einer positiven Lösung des Gleichungssystems ist für den irreduziblen Fall durch unsere Betrachtungen im § 1 mit der Existenz des Maximums von Φ nach dem Weierstraßschen Satze gesichert. Dagegen braucht die *Eindeutigkeit* der Lösung hier *nicht* vorausgesetzt zu werden, sie wird vielmehr — unabhängig von unserem in § 2 gegebenen Beweise — als spezielle Folgerung des allgemeinen Satzes gleichzeitig *mitbewiesen*.

Beweis des Konvergenztheorems. Für $t = 1, 2, \ldots, n$ sei $x_t > 0$ ein beliebiges positives Wertsystem und $u_t > 0$ eine positive Lösung der Gleichungen (37). Bezeichnen wir hier mit λ den kleinsten und mit μ den größten Quotienten aus der Reihe $\frac{x_t}{u_t}$,

$$\lambda u_t \leqq x_t \leqq \mu u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

so folgt aus 3., da die Funktionen f_r monoton sind,

$$\lambda f_r(u) \leqq f_r(x) \leqq \mu f_r(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

und wegen (37) auch

$$\lambda u_r \leqq x_r' \leqq \mu u_t,$$

sowie für alle folgenden Approximationen $x_t^{(i)}$

$$(42)_i \qquad \lambda u_t \leqq x_t^{(i)} \leqq \mu u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n).$$

Ebenso ist aber auch für jedes i, wenn wieder $\lambda^{(i)}$ den kleinsten und $\mu^{(i)}$ den größten Quotienten $\frac{x_t^{(i)}}{u_t}$ bezeichnet,

$$\lambda^{(i)} u_t \leqq x_t^{(i)} \leqq \mu^{(i)} u_t$$

und

$$\lambda^{(i)} u_t \leqq x_t^{(i+1)} \leqq \mu^{(i)} u_t,$$

also

$$\lambda^{(i)} \leqq \lambda^{(i+1)} \leqq \mu^{(i+1)} \leqq \mu^{(i)},$$

d. h. die Werte $\lambda^{(i)}$ bilden eine niemals fallende, die $\mu^{(i)}$ eine niemals steigende Reihe, wobei die Intervalle $(\lambda^{(i)}, \mu^{(i)})$ sukzessive ineinander liegen und alle im Gesamtintervall (λ, μ) enthalten sind. Die $\lambda^{(i)}$ besitzen also eine *obere* Grenze $\bar{\lambda}$, die $\mu^{(i)}$ eine *untere* Grenze $\bar{\mu}$, und es ist

$$(43) \qquad \lambda \leqq \lambda^{(i)} \leqq \bar{\lambda} \leqq \bar{\mu} \leqq \mu^{(i)} \leqq \mu \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

sowie

$$(44) \qquad \bar{\lambda} = \lim_{i \to \infty} \lambda^{(i)}, \qquad \bar{\mu} = \lim_{i \to \infty} \mu^{(i)}.$$

Läßt sich nun zeigen, daß beide Grenzwerte übereinstimmen,

$$(45) \qquad \bar{\lambda} = \bar{\mu} = \varrho,$$

so wird auch

$$(46) \qquad \lim_{i \to \infty} x_t^{(i)} = \varrho u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

wie zu beweisen.

Um aber diesen Nachweis zu führen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall I. Alle $f_{rs} > 0$, d. h. beim Turnierproblem $k_{rs} > 0$ für alle $r \neq s$: jeder Spieler hat mit jedem andern gespielt. Dann sind nach 3. auch sämtliche Ableitungen f_{rs} „positiv beschränkt", und für alle den Bedingungen

$$(42) \qquad \lambda u_t \leqq x_t \leqq \mu u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

genügenden Wertsysteme x_t, zu denen nach $(42)_i$ auch alle $x_t^{(i)}$ gehören, besitzen sie positive untere Schranken:

$$(47) \qquad f_{rs}(x) \geqq \gamma_{rs} > 0.$$

Nach dem Mittelwertsatze ist aber wegen (37)

$$(48) \qquad x_r^{(i+1)} - \lambda^{(i)} u_r = f_r(x^{(i)}) - f_r(\lambda^{(i)} u) = \sum_{t=1}^{n} f_{rt}(\tilde{x})\,(x_t^{(i)} - \lambda^{(i)} u_t),$$

wo

$$\tilde{x}_t = (1-\vartheta_r)\,\lambda^{(i)} u_t + \vartheta_r x_t^{(i)} \qquad (0 \leqq \vartheta_r \leqq 1;\ t = 1, 2, \ldots, n)$$

einen Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(x_t^{(i)})$ und $(\lambda^{(i)} u_t)$ kennzeichnet, der gleichfalls den Beziehungen (42) genügt. Daher ist nach (47) für jedes $s \leqq n$

$$x_r^{(i+1)} - \lambda^{(i)} u_r \geqq \gamma_{rs}(x_s^{(i)} - \lambda^{(i)} u_s). \tag{49}$$

Insbesondere gilt dies auch für die Maximal- bzw. Minimalwerte der Quotienten, wo

$$x_r^{(i+1)} = \lambda^{(i+1)} u_r, \qquad x_s^{(i)} = \mu^{(i)} u_s,$$

so daß wir erhalten

$$\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)} \geqq \gamma_{rs} \frac{u_s}{u_r}(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}) \geqq \varkappa(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}), \tag{50}$$

wenn $\varkappa$ den kleinsten der positiven Werte $\varkappa_{rs} = \gamma_{rs} \frac{u_s}{u_r}$ bedeutet, woraus folgt:

$$\mu^{(i)} - \lambda^{(i)} \leqq \frac{1}{\varkappa}(\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}) \quad \text{und}$$

$$\bar{\mu} - \bar{\lambda} = \lim_{i \to \infty}(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}) = 0, \tag{51}$$

w. z. b. w.

Um nun auch den Grad der Konvergenz abzuschätzen, bedienen wir uns noch einer zweiten, ganz analog wie (50) aus (47) abgeleiteten Formel: Es ist

$$\mu^{(i)} u_r - x_r^{(i+1)} = f_r(\mu^{(i)} u) - f_r(x^{(i)}) = \sum_{t=1}^{n} f_{rt}(\tilde{x})(\mu^{(i)} u_t - x_t^{(i)})$$

$$\geqq \gamma_{rs}(\mu^{(i)} u_s - x_s^{(i)}) \quad \text{für beliebige } r, s,$$

also für $x_r^{(i+1)} = \mu^{(i+1)} u_r$, $x_s^{(i)} = \lambda^{(i)} u_s$ weiter

$$\mu^{(i)} - \mu^{(i+1)} \geqq \varkappa(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}). \tag{52}$$

Durch Addition von (50) und (52) erhält man dann

$$\mu^{(i)} - \lambda^{(i)} - (\mu^{(i+1)} - \lambda^{(i+1)}) \geqq 2\varkappa(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}).$$

Also

$$\mu^{(i+1)} - \lambda^{(i+1)} \leqq (1 - 2\varkappa)(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}) \tag{53}$$

und somit

$$\mu^{(i)} - \lambda^{(i)} \leqq (\mu - \lambda)(1 - 2\varkappa)^i. \tag{54}$$

Die Approximationen konvergieren also mindestens wie eine geometrische Reihe.

Fall II. Nicht alle f_{rs} sind $\neq 0$, nicht alle f_r enthalten „eigentlich" sämtliche Variablen, dagegen gilt die Eigenschaft 4. Dieser Fall läßt sich

nun, wie wir zeigen wollen, auf den Fall I zurückführen, indem man die Substitutionen (35) iteriert und setzt:

$$(55)\qquad \begin{aligned} f_r^{(1)}(x) &\equiv f_r(f) \equiv f_r(f_1(x),\ f_2(x)\ \ldots\ f_n(x)) \\ f_r^{(2)}(x) &\equiv f_r(f^{(1)}) \equiv f_r(f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x)\ \ldots\ f_n^{(1)}(x)) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r^{(i+1)}(x) &\equiv f_r(f^{(i)}) \equiv f_r(f_1^{(i)}(x)\qquad\quad \ldots\ f_n^{(i)}(x)) \end{aligned}$$

$$(r=1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots).$$

Diese durch Iteration entstehenden Funktionen $f_r^{(i)}(x)$ besitzen nämlich, wie leicht ersichtlich, die gleichen Eigenschaften 1—3 wie die ursprünglichen $f_r(x)$, da sich diese Eigenschaften stets auf die zusammengesetzten Funktionen übertragen. Insbesondere ist auch für jede solche Funktion F in jedem positiv beschränkten Bereiche

$$(56)\qquad \frac{\partial}{\partial x_r} F(f_1, f_2, \ldots) = \sum_t \frac{\partial F}{\partial f_t}\frac{\partial f_t}{\partial x_r} \geqq \frac{\partial F}{\partial f_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_r} > 0,$$

wenn auch nur für *ein* s die nach f_s genommene Ableitung von F sowie die nach x_r genommene von f_s nicht verschwindet. Hieraus folgt zunächst, daß mit $f_{rr} \neq 0$ (vermöge 4) auch

$$f_{rr}^{(1)}(x) > 0,\quad f_{rr}^{(2)}(x) > 0,\quad \ldots,\quad f_{rr}^{(i)}(x) > 0,$$

daß also sämtliche $f_r^{(i)}$ *monotone* Funktionen von x_r sind.

Angenommen nun, die der Reihe der Funktionen f_t entnommene Funktion $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ enthalte „eigentlich" die mit x_r bezeichneten Variablen aus der Reihe $x_1 \ldots x_n$, so daß alle $\frac{\partial F}{\partial x_r} > 0$ sind, während für alle übrigen (hier mit x_s bezeichneten) immer $\frac{\partial F}{\partial x_s} = 0$ sei, so gibt es nach 4. ein Wertepaar r, s, für welches $f_{rs} \neq 0$ ist, und wir haben wegen (56) einmal

$$(57)\qquad \frac{\partial}{\partial x_r} F(f) > 0 \quad \text{für alle } r, \text{ für die } \frac{\partial F(x)}{\partial x_r} > 0 \text{ ist,}$$

sowie

$$(58)\qquad \frac{\partial}{\partial x_s} F(f) \geqq \frac{\partial F}{\partial f_r}\frac{\partial f_r}{\partial x_s} > 0,$$

d. h. die Funktion $F(f) = F^{(1)}(x)$ enthält eigentlich *alle* x_r, welche $F(x)$ eigentlich enthält, und *außerdem* noch mindestens eine weitere Variable x_s. Somit enthält in der Reihe

$$F(x),\quad F^{(1)}(x) = F(f),\quad F^{(2)}(x) = F^{(1)}(f),\quad \ldots,\quad F^{(i+1)}(x) = F^{(i)}(f)$$

bereits $F^{(n-1)}(x)$ sämtliche n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, und insbesondere gibt es auch eine Zahl $h \leqq n-1$ von der Beschaffenheit, daß die n Funktionen

$$f_1^{(h)}(x),\ f_2^{(h)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(h)}(x),$$

welche durch h-fache Iteration der Substitution (35) entstehen, die sämtlichen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ eigentlich enthalten. Diese Funktionen $f_r^{(h)}$ genügen den sämtlichen Bedingungen 1 bis 5, da ersichtlich auch für jedes positive Lösungssystem (u) von (37)

$$(37)_h \qquad u_r = f_r^{(h)}(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, und damit sind alle Voraussetzungen der Konvergenz im Falle I gegeben. Es werden also für ein beliebiges positives System (x) von Anfangswerten die Iterationswerte [9])

$$x_r^{(h)} = f_r^{(h)}(x),\ x_r^{(2h)} = f_r^{(2h)}(x),\ \ldots,\ x_r^{(ih)} = f_r^{(ih)}(x)$$

mit wachsendem i einer Lösung von (37) zustreben, indem die entsprechenden Differenzen $\mu^{(ih)} - \lambda^{(ih)}$ sich der 0 nähern, und somit gilt auch allgemein

$$\bar{\mu} - \lambda = \lim_{j=\infty} (\mu^{(j)} - \lambda^{(j)}) = 0,$$

d. h. auch in dem durch die Bedingungen 1 bis 5 gegebenen *allgemeinen* Falle führt unser Verfahren der sukzessiven Approximation zur numerischen Lösung des irreduziblen Problems. Der Unterschied der beiden Fälle I und II macht sich nur insofern geltend, daß im Falle II in der Folge der Approximationen $x^{(i)}$ gelegentlich auch

$$\mu^{(i+1)} - \lambda^{(i+1)} = \mu^{(i)} - \lambda^{(i)}$$

ausfallen kann, während doch immer, wie aus unserer Reduktion vermöge $f_r^{(h)}$ hervorgeht,

$$\mu^{(i+h)} - \lambda^{(i+h)} < \mu^{(i)} - \lambda^{(i)}$$

sein muß.

Unsere Auflösungsmethode ist also, weit entfernt, nur auf „reguläre" Turniere (wo $k_{r,t} = k$ konstant ist) beschränkt zu sein, wie meines Wissens alle bisherigen Methoden der Turnierberechnung, im „irreduziblen" Falle auch ohne weiteres auf „abgebrochene" und auf „kombinierte" Turniere (die aus verschiedenen Einzelturnieren mit teilweise identischen Spielern zusammengesetzt sind) anwendbar und liefert auch in „reduziblen" Fällen stets eine das vorliegende Beobachtungsmaterial gleichmäßig berücksichtigende und allen vernünftigen Forderungen genügende vollständige oder teilweise Bestimmung der relativen Spielstärken.

[9]) Es wird hier von der Gültigkeit des Assoziationsgesetzes für die Zusammensetzung von Substitutionen Gebrauch gemacht.

Bei der praktischen Ausführung der Rechnung wird man in der Regel mit dem Ansatz $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ beginnen und hieraus mit Hilfe von Reziprokentafeln gemäß (33) die sukzessiven Annäherungen $x_r', x_r'', \ldots$ bestimmen und so lange damit fortfahren, bis je zwei aufeinanderfolgende sich nicht mehr merklich unterscheiden, das Gleichungssystem (8) also erfüllt ist. Vorher muß man sich aber erst von der „Irreduzibilität" des Turniers überzeugt bzw. die erforderliche Zerlegung in „Primturniere" vorgenommen haben, was im „regulären" Falle ($k_{rt} = k$) am bequemsten geschieht nach dem am Schluß von § 4 angegebenen Verfahren, d. h. durch Anordnung der g_r nach aufsteigender Größe und Vergleichung ihrer Teilsummen G_r mit den entsprechenden Zahlen $\frac{1}{2}kr(r-1)$ gemäß (32).

Als Beispiel für die Auswertung eines größeren (regulären) Turniers gebe ich zum Schluß eine kurze Tabelle, die nach dem New-Yorker Meisterturnier von 1924 für $n = 11$ Teilnehmer (darunter E. Lasker als erster Preisträger) nach dem angegebenen Verfahren berechnet wurde, wobei die berechneten „Spielstärken" u_r auf die Summe 100 normiert sind und γ_r wegen $k = 2$ die Differenz $G_r - r(r-1)$ bedeutet.

r	u_r	g_r	G_r	$r(r-1)$	γ_r
1	2,43	5	5	0	5
2	3,44	6,5	11,5	2	9,5
3	3,84	7	18,5	6	12,5
4	4,72	8	26,5	12	14,5
5	6,40	9,5	36	20	16
6	7,12	10	46	30	16
7	7,84	10,5	56,5	42	14,5
8	8,71	11	67,5	56	11,5
9	10,7	12	79,5	72	7,5
10	18,4	14,5	94	90	4
11	26,4	16	110	110	0

(Eingegangen am 28. Mai 1928.)

Über einen Egerváryschen Satz.

Von

E. Landau in Göttingen.

Satz (Egerváry, Math. Annalen, Bd. 99, S. 560). *Ist* $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ *für* $|x| \leqq 1$ *regulär und hat* $|f(x)|$ *auf* $|x| = 1$ *den Mittelwert* 1, *so ist*

$$(1 - \varrho^2) \sum_0^\infty |a_n| \varrho^n \leqq 1 \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \varrho < 1.$$

Direkter Beweis. Setzt man $g(x) = \prod \frac{\xi - x}{1 - \bar{\xi} x}$, erstreckt über die Wurzeln ξ von $f(x)$ mit $|\xi| < 1$, so ist für $|x| \leqq 1$

$$f(x) = g(x) h^2(x), \qquad h(x) \text{ stetig und für } |x| < 1 \text{ regulär.}$$

Bei $g(x) h(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$, $h(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ für $|x| < 1$ ist also, weil $g^2(x) h^2(x)|$ und $|h^2(x)|$ auf $|x| = 1$ den Mittelwert 1 haben,

$$\sum_0^\infty |a_n| \varrho^n \leqq \sum_0^\infty |b_n| \varrho^n \cdot \sum_0^\infty |c_n| \varrho^n \leqq \sqrt{\sum_0^\infty |b_n|^2 \cdot \sum_0^\infty \varrho^{2n} \cdot \sum_0^\infty |c_n|^2 \cdot \sum_0^\infty \varrho^{2n}} = \frac{1}{1 - \varrho^2}$$

Göttingen, den 3. August 1928.

(Eingegangen am 5. August 1928.)

Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung.

Von

E. Landau in Göttingen.

Satz. *Bei* $n \geqq 1$, $\xi^n = 1$, $(r, n) = 1$ *folgt aus* $P(\xi) = 0$, *wenn* $P(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s$ *ganze Koeffizienten hat und irreduzibel ist, stets* $P(\xi^r) = 0$.

Neuer Beweis. η sei eine beliebige Nullstelle von $P(x)$. Für jedes ganze k ist dann $P(\eta^k) = R(\eta)$, wo $R(x)$ $(= R_k(x))$ ein wohlbestimmtes ganzzahliges Polynom vom Grade $< s$ aus einem endlichen Vorrat ist. Die Koeffizienten des zu $P(\eta^p) = P(\eta^p) - (P(\eta))^p$ gehörigen $R(x)$ sind durch p teilbar (p Primzahl). Ist A der größte absolute Betrag aller Koeffizienten aller $R(x)$, so ist also $P(\eta^p) = 0$ für $p > A$. Daher ist $P(\xi^m) = 0$, wenn m durch kein $p \leqq A$ teilbar ist. $m = r + n \prod_{\substack{p \leqq A \\ p \nmid r}} p$ tut dies und ist $\equiv r \pmod{n}$.

Göttingen, den 23. Juli 1928.

(Eingegangen am 25. Juli 1928.)

Zur Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung.

Von

I. Schur in Berlin.

Es genügt bekanntlich zu beweisen:

Ist

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k$$

ein ganzzahliges Polynom, das in $x^n - 1$ *aufgeht, so ist für jede zu* n *teilerfremde Primzahl* p *zugleich mit* ξ *auch* ξ^p *eine Wurzel der Gleichung* $f(x) = 0$.

Der schöne Mertenssche Beweis aus dem Jahre 1908 (Wiener Berichte **117**, S. 689—690) beruht auf der Überlegung, daß der Satz für jedes p richtig ist, wenn er für alle genügend großen Primzahlen gilt. Diese Beweismethode ist von Herrn E. Landau in der vorstehenden Note auf die denkbar einfachste Form gebracht worden. Will man den Umweg über große Primzahlen vermeiden und sich an die gegebene Primzahl halten, so kann man kaum elementarer und eleganter schließen, als dies Mertens in seiner Note aus dem Jahre 1905 (Wiener Berichte **114**, S. 1293—1296) tut.

Die Betrachtung läßt sich aber, wie mir scheint, noch ein wenig durchsichtiger gestalten, wenn man den Begriff der ganzen algebraischen Zahl als bekannt voraussetzt und außerdem noch weiß, daß die Diskriminante der Gleichung $x^n - 1 = 0$ den Wert $\pm n^n$ hat. Man schließt dann einfach so: Ist

$$f(x) = (x - \xi)(x - \xi') \ldots (x - \xi^{(k-1)})$$

und nimmt man an, $f(\xi^p)$ sei nicht Null, so erscheint

$$f(\xi^p) = (\xi^p - \xi)(\xi^p - \xi') \ldots (\xi^p - \xi^{(k-1)})$$

als Produkt gewisser Differenzen von Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, also als ganzer algebraischer Teiler der Diskriminante $\pm n^n$ dieser Gleichung. Es ist aber

$$f(x^p) \equiv [f(x)]^p \pmod{p},$$

also $f(\xi^p) \equiv 0 \pmod{p}$. Es würde sich demnach p als Teiler von n^n ergeben, was der Voraussetzung widerspricht, daß p zu n teilerfremd sein soll.

(Eingegangen am 29. Juli 1928.)

Elementarer Beweis eines Satzes von L. Stickelberger.

Von

I. Schur in Berlin.

Man verdankt Herrn Stickelberger[1]) folgende ebenso einfache wie wichtige Regel:

Die Diskriminante D eines algebraischen Zahlkörpers ist stets kongruent 0 *oder* 1 *nach dem Modul* 4.

Die bis jetzt bekannt gewordenen Beweise operieren mit Hilfsmitteln, die den Satz als nicht ganz auf der Hand liegend erscheinen lassen. Der folgende überraschend einfache Beweis scheint in der Literatur noch nirgends angegeben zu sein.

Es handle sich um einen Körper n-ten Grades $P(\vartheta)$. Die zu ϑ konjugierten Zahlen seien $\vartheta^{(0)} = \vartheta, \vartheta', \ldots, \vartheta^{(n-1)}$. Bilden die ganzen algebraischen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Minimalbasis von $P(\vartheta)$, so wird $D = \Delta^2$ mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & , \omega_2 & , \ldots, \omega_n \\ \omega_1' & , \omega_2' & , \ldots, \omega_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(n-1)} & , \omega_2^{(n-1)} & , \ldots, \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Man schreibe nun Δ in der Form $\Delta = A - B$,

$$A = \sum \omega_1^{(\alpha_0)} \omega_2^{(\alpha_1)} \ldots \omega_n^{(\alpha_{n-1})}, \qquad B = \sum \omega_1^{(\beta_0)} \omega_2^{(\beta_1)} \ldots \omega_n^{(\beta_{n-1})},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ alle geraden und $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ alle ungeraden Permutationen der Indizes $0, 1, \ldots, n-1$ durchlaufen. Die Ausdrücke $A + B$ und AB erscheinen nun offenbar als symmetrische Funktionen von $\vartheta^{(0)}, \vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n-1)}$, sie sind also rationale ganze algebraische Zahlen, d. h. ganze rationale Zahlen. Folglich hat

$$D = (A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB$$

[1]) *Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper*, Verhandlungen des ersten intern. Math.-Kongresses in Zürich 1897, S. 182—193. — Vgl. auch K. Hensel, *Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten*, Journal für die r. u. a. Mathematik **129** (1905), S. 68—85.

die Gestalt $b^2 - 4c$ mit ganzen rationalen Werten b und c. Eine solche Zahl ist aber von der Form $4x$ oder $4x+1$.

Von einigem Interesse ist auch eine ganz analoge Bemerkung über Gleichungsdiskriminanten. Sei

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots \pm c_n = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu)$$

ein beliebiges Polynom. Man fasse $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Variable und $c_1, c_2, \ldots, c_n$ als die zugehörigen elementarsymmetrischen Funktionen auf. Setzt man

$$D = \prod_{\alpha<\beta}^{n} (x_\alpha - x_\beta)^2 = \Phi(c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

so wird Φ ein wohlbestimmtes ganzzahliges Polynom in den c_ν. Diesen Ausdruck kann man auf zwei verschiedene Arten mod 4 durch einfachere Ausdrücke ersetzen.

Schreibt man überall $(x_\alpha - x_\beta)^2 = (x_\alpha + x_\beta)^2 - 4x_\alpha x_\beta$, so wird

$$D \equiv \prod_{\alpha<\beta}^{n} (x_\alpha + x_\beta)^2 \pmod 4.$$

Hieraus folgt: Ist

$$\prod_{\alpha<\beta}^{n} (x_\alpha + x_\beta) = \Psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

die sog. „Geminante" von $f(x)$ [2]), so wird $\Phi = \Psi^2 \pmod 4$. Schreibt man aber das Differenzenprodukt $\prod(x_\alpha - x_\beta)$ als Vandermondesche Determinante und wendet auf sie die analoge Betrachtung an wie oben auf die Determinante Δ, so ergibt sich: Ist

$$S = \sum x_1^{\alpha_0} x_2^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_{n-1}}$$

die Summe aller $n!$ Produkte mit den Exponenten $0, 1, \ldots, n-1$ (in beliebiger Reihenfolge), so wird, wenn $S = \mathsf{X}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ gesetzt wird, $\Phi \equiv \mathsf{X}^2 \pmod 4$.

Zugleich ergibt sich, daß

$$\prod_{\alpha<\beta}^{n} (x_\alpha + x_\beta) \equiv S \pmod 2$$

wird. Diese Tatsache ist ohne den Umweg über die Diskriminante nicht ganz leicht zu beweisen.

[2]) Der Ausdruck Ψ läßt sich viel einfacher berechnen als der Ausdruck Φ. Vgl. L. Orlando, *Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un' equazione algebraica*, Math. Annalen **71** (1912), S. 233–245.

(Eingegangen am 29. Juli 1928.)

Über konforme Abbildungen von einfach zusammenhängenden Bereichen durch algebraische Funktionen.

Von

Friedrich Ringleb in Jena.

Die Funktion, welche einen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich umkehrbar eindeutig und konform auf die Halbebene abbildet, braucht, wenn die Begrenzung des Bereiches einer algebraischen Kurve angehört, im allgemeinen keine algebraische Funktion zu sein. Es entsteht daher die Frage, welche von algebraischen Kurven begrenzten Bereiche eine algebraische Abbildungsfunktion besitzen. Im folgenden wird bewiesen:

Gehört die Begrenzung S eines schlichten einfach zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ der Kurve $Q(x, y) = C$ an, wo $Q(x, y)$ eine rationale Potentialfunktion und C eine reelle Konstante ist, so läßt sich $\mathfrak{B}$ umkehrbar eindeutig und konform mit Hilfe einer algebraischen Funktion auf die Halbebene abbilden.

Der Beweis und die Konstruktion der Abbildungsfunktion stützen sich auf Gedankengänge von Christoffel [1]), Schwarz [2]) und Study [3]). Es sei $-P(x, y)$ die zu $Q(x, y)$ konjugierte Potentialfunktion. Dann ist

$$\zeta = P(x, y) + i\,Q(x, y) = R(z)$$

eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Diese bildet den Bereich $\mathfrak{B}$ auf ein einfach zusammenhängendes Riemannsches Flächenstück Φ ab, welches eine zur reellen ζ-Achse im Abstande C parallele

[1]) E. B. Christoffel, Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Annali di mat. Ser. II, **1** (1868), S. 89–103. Ges. Abh. **1**, S. 245–258.

[2]) H. A. Schwarz, Über einige Abbildungsaufgaben. Journ. f. Math. **70** (1869), Ges. Werke II, S. 65.

[3]) Study-Blaschke, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft II: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche (1913), S. 72–74.

geradlinige Begrenzung besitzt. Das Riemannsche Flächenstück Φ hat im Innern und im allgemeinen auch auf seiner Begrenzung endlich viele Windungspunkte endlicher Ordnung. Liegt auf der Begrenzung ein Windungspunkt von der Ordnung $n-1$, so hat die Kurve $Q(x, y) = C$ an der entsprechenden Stelle der z-Ebene einen n-fachen Punkt, in welchem sich n Zweige der Kurve unter gleichen Winkeln schneiden. Jeder dieser Winkel geht bei der Abbildung durch $\zeta(z)$ in einen Winkel von der Größe π über. Die Begrenzungen von Φ schließen daher an einer Stelle, welche einem mehrfachen Punkte M der Kurve $Q(x, y) = C$ entspricht, Winkel ein, welche ganze Vielfache von π sind.

Das Innere des Riemannschen Flächenstückes Φ denken wir uns jetzt auf die obere w-Halbebene umkehrbar eindeutig und, von den Windungspunkten abgesehen, konform abgebildet. Wir betrachten die Umkehrfunktion $\zeta = \zeta(w)$. Diese hat, von gewissen Ausnahmestellen abgesehen, an jeder endlichen Stelle w_1 eine Entwicklung von der Form

$$\zeta = a_0 + a_1(w - w_1) + a_2(w - w_1)^2 + \ldots, \quad a_1 \neq 0.$$

Wir können ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß im Unendlichen eine Entwicklung von der Form

$$\zeta = b_0 + \frac{b_1}{w} + \frac{b_2}{w^2} + \ldots, \quad b_1 \neq 0$$

gilt. Als Ausnahmestellen w_2 kommen in Betracht

1. alle Stellen im Inneren der oberen w-Halbebene oder auf ihrem Rande, in denen $\zeta(w)$ Pole 1. Ordnung hat,

2. alle Stellen im Inneren der oberen w-Halbebene, welche in Windungspunkte im Endlichen oder Unendlichen des Flächenstückes Φ übergehen,

3. alle Stellen auf der reellen w-Achse, welche in Windungspunkte im Endlichen oder Unendlichen des Randes von Φ übergehen. An diesen Stellen wird der an die reelle w-Achse anschließende Flächenwinkel übergeführt in einen Winkel, der ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Wenn $\mathfrak{B}$ ein Schlitzbereich ist, kommt die gleiche Eigenschaft denjenigen Stellen w_2 der reellen w-Achse zu, welche in solche Punkte von Φ übergehen, die Schlitzendpunkten von $\mathfrak{B}$ entsprechen. Alle Stellen w_2 liegen im Endlichen und sind in endlicher Anzahl vorhanden. Man erkennt, daß die Funktion $\zeta(w)$ an einer Stelle w_2 nur eine Entwicklung haben kann, welche sich einer der Formen

$$\text{(I)} \quad \zeta = c_0 + c_\lambda(w - w_2)^\lambda + c_{\lambda+1}(w - w_2)^{\lambda+1} + \ldots, \quad c_\lambda \neq 0,$$

$$\text{(II)} \quad \zeta = \frac{c_{-\lambda}}{(w - w_2)^\lambda} + \frac{c_{-\lambda+1}}{(w - w_2)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{w - w_2} + c_0 + c_1(w - w_2) + \ldots,$$
$$c_{-\lambda} \neq 0$$

unterordnet, in denen λ eine positive ganze Zahl ist. Die Funktion $\zeta(w)$ ist somit in der oberen w-Halbebene und auf ihrem Rande bis auf endlich viele Pole regulär. Die Funktion

$$\zeta_1(w) = \zeta(w) - iC$$

ist längs der reellen w-Achse reell und läßt sich über diese durch Spiegelung analytisch fortsetzen. In konjugiert komplexen Punkten w und $\bar{w}$ nimmt $\zeta_1(w)$ konjugiert komplexe Werte an. $\zeta_1(w)$ ist somit eine in der ganzen w-Ebene bis auf endlich viele Pole reguläre Funktion, also eine rationale Funktion. Ebenso ist $\zeta(w)$ eine rationale Funktion $R_1(w)$. Die gesuchte Abbildungsfunktion $w = f(z)$ genügt somit der algebraischen Gleichung

$$R(z) - R_1(w) = 0.$$

Zur Bestimmung von $\zeta(w)$ verfährt man folgendermaßen. Man bildet die Funktion

$$\varphi(w) = \frac{d}{dw} \log \frac{d\zeta_1}{dw} = \frac{d}{dw} \log \frac{d\zeta}{dw}.$$

An einer Stelle w_1 ist $\frac{d\zeta}{dw} \neq 0$, also $\varphi(w)$ regulär. An einer Stelle w_2 gilt im Falle (I) die Entwicklung

$$\varphi(w) = \frac{\lambda - 1}{w - w_2} + \mathfrak{P}_1(w - w_2)$$

und im Falle (II) die Entwicklung

$$\varphi(w) = -\frac{\lambda + 1}{w - w_2} + \mathfrak{P}_2(w - w_2),$$

unter $\mathfrak{P}_1(w - w_2)$ und $\mathfrak{P}_2(w - w_2)$ reguläre Potenzreihen verstanden. Im Unendlichen verschwindet $\varphi(w)$. Somit ist $\varphi(w)$ eine bis auf endlich viele Pole erster Ordnung in der ganzen w-Ebene reguläre, im Unendlichen verschwindende Funktion, also eine rationale Funktion, welche man erhält, indem man die polaren Bestandteile addiert:

$$\varphi(w) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\lambda_\nu - 1}{w - \gamma_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda'_\nu + 1}{w - \gamma'_\nu} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\lambda_\nu - 1}{w - \bar{\gamma}_\nu}$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda'_\nu + 1}{w - \bar{\gamma}'_\nu} + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{\mu_\nu - 1}{w - \alpha_\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\mu'_\nu + 1}{w - \alpha'_\nu}.$$

Hierbei sind γ_ν bzw. γ'_ν diejenigen Stellen w_2 im Innern der oberen w-Halbebene, an denen die Entwicklungen (I) bzw. (II) gelten. α_ν bzw. α'_ν sind die entsprechenden Stellen der reellen w-Achse. $\bar{\gamma}_\nu$, $\bar{\gamma}'_\nu$ sind die zu γ_ν, γ'_ν konjugierten Werte. λ_ν, μ_ν bzw. λ'_ν, μ'_ν sind die zu γ_ν, α_ν bzw.

γ'_ν, α'_ν gehörigen Exponenten λ der Entwicklungen (I) bzw. (II). Die Integration ergibt

$$\zeta_*(w) = C_1 \int_{w_0}^{w} \frac{\prod_{\nu=1}^{m} \{(w-\gamma_\nu)(w-\bar{\gamma}_\nu)\}^{\lambda_\nu - 1} \prod_{\nu=1}^{r} (w-\alpha_\nu)^{\mu_\nu - 1}}{\prod_{\nu=1}^{n} \{(w-\gamma'_\nu)(w-\bar{\gamma}'_\nu)\}^{\lambda'_\nu + 1} \prod_{\nu=1}^{s} (w-\alpha'_\nu)^{\mu'_\nu + 1}} dw + C_2,$$

wobei C_1 eine reelle, C_2 eine beliebige Konstante ist und der Integrationsweg von w_0 aus im Inneren oder auf dem Rande der oberen w-Halbebene zu erstrecken ist. Unter dem Integral steht eine rationale Funktion. Wird die Integration ausgeführt, so treten im allgemeinen logarithmische Glieder auf, deren Koeffizienten gleich Null zu setzen sind, wenn $\zeta_*(w)$ eine rationale Funktion sein soll. Man erhält auf diese Weise Beziehungen zwischen den Konstanten unter dem Integral. Die noch freien Konstanten hat man alsdann so zu bestimmen, daß das Riemannsche Flächenstück Φ_*, in welches die obere w-Halbebene durch $\zeta_*(w)$ abgebildet wird, mit Φ identisch wird. Daß die Konstantenbestimmung stets möglich ist, ergibt sich leicht mit Benutzung des Riemannschen Abbildungssatzes [4]). Sie erfordert nur die Auflösung von algebraischen Gleichungen.

Nach dem obigen Satze sind z. B. die Abbildungsfunktionen 1. der längs eines Stückes einer gleichseitigen Hyperbel aufgeschlitzten Ebene, 2. des den Mittelpunkt enthaltenden Teiles der Ebene [5]), welcher von einem gleichseitigen Hyperbelast begrenzt wird, und 3. des Teiles der Ebene, welcher zwischen den beiden Ästen einer gleichseitigen Hyperbel liegt, algebraische Funktionen. Ebenso ist die Abbildungsfunktion eines Bereiches, dessen Begrenzung einer Lemniskate angehört, eine algebraische Funktion [6]).

Das angegebene Abbildungsverfahren ließe sich im allgemeinen auch dann anwenden, wenn an Stelle der rationalen Funktion $R(z)$ eine in der z-Ebene eindeutige Funktion treten würde.

---

[4]) F. Ringleb, Über die konforme Abbildung von Polygonen. Diss. Jena 1926, S. 24–26.

[5]) Gleiches gilt für den Teil, welcher den Brennpunkt enthält, wie allgemein bekannt ist.

[6]) Man vgl. auch: G. Léry, Sur la fonction de Green pour un contour algébrique. Ann. de l'Ec. Norm. (3) **32** (1915).

(Eingegangen am 10. März 1928.)

Die ebenen Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung.

Von

Gerhard Grüß in Berlin.

Im Sinn des regulären einfachsten Variationsproblems

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f(x, y, x', y')\, dt = 0$$

wird einer Richtung dx, dy die transversale Richtung $d\xi, d\eta$ durch die Gleichung

$$d\xi \frac{\partial f}{\partial x'}(x, y, dx, dy,) + d\eta \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, dx, dy) = 0$$

zugeordnet. Diese Transversalitätsbedingung heißt symmetrisch, wenn zu $d\xi, d\eta$ die Richtung dx, dy als transversale Richtung gehört. Herr Blaschke[1]) hat gezeigt, daß im dreidimensionalen Fall die Transversalitätsbedingung dann und nur dann symmetrisch ist, wenn

$$f(x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3') = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i' x_k'}$$

gilt, hat aber zum Schluß seiner Note darauf hingewiesen, daß es beim ebenen Problem viel allgemeinere Funktionen $f(x, y, x', y')$ mit jener Symmetrieeigenschaft gibt. Herr Radon[2]) hat, von einem geometrischen Problem ausgehend, alle diese Funktionen bestimmt, indem er die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für gewisse in seiner Parameterdarstellung benutzte willkürliche Funktionen aufstellte. In den folgenden Zeilen soll nun eine von der Radonschen vollkommen verschiedene Darstellung jener Funktionen gegeben werden, zu der ich bei der Unter-

[1]) W. Blaschke, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 119, und Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Klasse 68 (1916), S. 50 ff.

[2]) J. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, ebenda, S. 123 ff.

suchung von Kurvennetzen auf Flächen allgemeiner Metrik gelangte. Diese Darstellung verdient vielleicht, trotzdem sie zunächst weniger kurz als bei Herrn Radon erscheint, deshalb Interesse, weil sie zu einer außerordentlich anschaulichen Charakteristik der Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung führt (im folgenden kurz als „symmetrische Variationsprobleme" bezeichnet). Endlich sollen die Radonsche und die hier gegebene Darstellung in Beziehung gebracht werden.

1. Die Funktion $f(x, y, x', y')$ soll (positiv) definit sein, speziell $f(x, y, x', y') \neq 0$, und wird in üblicher Weise positiv-homogen erster Ordnung bezüglich der Veränderlichen x', y' vorausgesetzt, so daß

$$f(x, y, kx', ky') = kf(x, y, x', y') \qquad (k > 0),$$

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} = f \tag{1}$$

gilt. Nun setze man für $y' \neq 0$, $f_{x'} \neq 0$

$$\text{sign } y' = \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \frac{x'}{|y'|} = z_1, \quad q_1(z_1, \varepsilon_1) = -\varepsilon_1 \frac{f_{y'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)}{f_{x'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)}, \tag{2}$$

und für $x' \neq 0$, $f_{y'} \neq 0$

$$\text{sign } x' = \varepsilon_2 = \pm 1, \quad \frac{y'}{|x'|} = z_2, \quad q_2(\varepsilon_2, z_2) = -\varepsilon_2 \frac{f_{x_1}(\ldots, \varepsilon_2, z_2)}{f_{y'}(\ldots, \varepsilon_2, z_2)}. \tag{3}$$

Dann ist nach Gl. (1)

$$\frac{f_{x'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)}{f(\ldots, z_1, \varepsilon_1)} = \frac{1}{z_1 - q_1(z_1, \varepsilon_1)} \qquad (y' \neq 0) \tag{4}$$

und

$$\frac{f_{y'}(\ldots, \varepsilon_2, z_2)}{f(\ldots, \varepsilon_2, z_2)} = \frac{1}{z_2 - q_2(\varepsilon_2, z_2)} \qquad (x' \neq 0). \tag{5}$$

Daher kann man $f(\ldots, x', y')$ in folgenden Formen darstellen:

$$\begin{cases} f(x, y, x', y') = C_1(x, y, \varepsilon_1)\, |y'|\, e^{\int \frac{dz_1}{z_1 - q_1}} & (y' \neq 0), \\ f(x, y, x', y') = C_2(x, y, \varepsilon_2)\, |x'|\, e^{\int \frac{dz_2}{z_2 - q_2}} & (x' \neq 0). \end{cases} \tag{6}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind natürlich nicht unabhängig voneinander, da für $x' \neq 0$, $y' \neq 0$ beide Darstellungen gelten. Aus (2) und (3) folgt

$$q_1(z_1, \varepsilon_1) \cdot q_2(\varepsilon_2, z_2) = +1, \qquad z_1 \cdot z_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \pm 1, \tag{7}$$

auch wenn x' oder y' Null ist. Es tritt daher eigentlich nur eine Funktion $q(\alpha, \beta)$ auf, aus der q_1 und q_2 durch Spezialisierung der unabhängigen Veränderlichen hervorgehen. Nach (6) werden durch diese Funktion q die Eigenschaften von $f(\ldots, x', y')$ bestimmt; wesentlich ist, daß in der Darstellung (6) q zwar von zwei Variabeln abhängt, von denen

jedoch die eine nur die Werte ± 1 annehmen kann. Aus (2) und (3) folgt, daß q_1 und q_2 eindeutige und bis auf evtl. Nullstellen der Nenner stetige Funktionen ihrer Argumente und positiv-homogen erster Ordnung sind, und aus (4) und (5) folgt, daß

$$q_1(z_1, \varepsilon_1) - z_1 \neq 0, \quad q_2(\varepsilon_2, z_2) - z_2 \neq 0$$

ist. Man darf erwarten, daß die Symmetrie der zu der Funktion f gehörigen Transversalitätsbedingung in einer charakteristischen Eigenschaft der Funktion $q(\alpha, \beta)$ zum Ausdruck kommt. Tatsächlich gilt der

Satz. *Die zu der Funktion $f(\ldots, x', y')$ gehörige Transversalitätsbedingung ist dann und nur dann symmetrisch, wenn $q_1(z_1, \varepsilon_1)$ die Gleichung*

$$q_1(q_1(z_1, \varepsilon_1), \varepsilon_1) = z_1 \tag{8}$$

befriedigt.

Bemerkung. Dann ist von selbst auch

$$q_2(\varepsilon_2, q_2(\varepsilon_2, z_2)) = z_2, \tag{8a}$$

wie aus (7) folgt, wenn man z_1 durch q_1, z_2 durch q_2 ersetzt; diese Substitution ist erlaubt, weil $q_1(z_1, \varepsilon_1) \cdot q_2(\varepsilon_2, z_2) = 1$ ist. Man darf sich also auf die Untersuchung von $q_1(z_1, \varepsilon_1) = q(z, \varepsilon)$ beschränken.
Aus der Eigenschaft der Funktion q, mit ihrer Umkehrungsfunktion identisch zu sein, aus ihrer Eindeutigkeit und also umkehrbaren Eindeutigkeit, aus der Ungleichung

$$q(z, \varepsilon) - z \neq 0$$

lassen sich, am leichtesten durch geometrische Deutung in einer q-z-Ebene, einige Schlüsse ziehen: Die Kurve $q(z)$ ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden $q = z$ des ersten und vierten Quadranten und zerfällt in zwei getrennte Äste; der Eindeutigkeit wegen liegt der eine Ast im zweiten, der andere im vierten Quadranten, zwar so, daß die achsenparallelen Begrenzungsgeraden der Quadranten sich auf der Geraden $q = z$ schneiden. Diese Geraden $z = a$, $-\infty < q < +\infty$ und $-\infty < z < +\infty$, $q = a$ sind Asymptoten beider Kurvenäste, weil $q(z)$ für $-\infty < z < +\infty$ definiert sein muß. Endlich verläuft der Eindeutigkeit wegen $q(z)$ überall streng monoton. Die Unendlichkeitsstelle $z = a$ von $q(z)$ ist nach (2) die Nullstelle von $f_{x'}\left(\ldots, \frac{x'}{y'}, \operatorname{sign} y'\right)$. Die Forderung (8) besagt, daß sowohl $q(z, +1)$ als auch $q(z, -1)$ die eben aufgezählten Eigenschaften haben.

Nun der Beweis des Satzes. 1. Die Bedingung (8) ist hinreichend. Die zu der Richtung x', y' transversale Richtung ξ', η' wird durch die Gleichung

$$\xi' f_{x'} + \eta' f_{y'} = 0 \tag{9}$$

bestimmt. Nun sei $y' \neq 0$; dann gilt, zunächst nur für $f_{x'} \neq 0$, also $\eta' \neq 0$,

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \operatorname{sign} y' \cdot q_1(z_1, \varepsilon_1),$$

und, indem man $\operatorname{sign} \eta' = \operatorname{sign} y'$ setzt,

$$\frac{\xi'}{|\eta'|} = q_1(z_1, \varepsilon_1). \tag{10}$$

Diese Gleichung behält aber auch für $f_{x'} = 0$ ihren Sinn, da dann nach (2) bzw. nach (9)

$$\frac{1}{q_1(z_1, \varepsilon_1)} = 0 \quad \text{und} \quad \eta' = 0$$

gilt. Gl. (10) liefert also stets die zu x', y' transversale Richtung ξ', η', wenn man noch für $\eta' \neq 0$ die Verabredung $\operatorname{sign} \eta' = \operatorname{sign} y'$ beachtet. Wegen der Symmetrieeigenschaft von $q(z, \varepsilon)$ gehört dann zur Richtung ξ', η' die Richtung x', y', d. h. die Transversalitätsbedingung ist unter der Voraussetzung (8) symmetrisch. Das gilt auch für $\eta' = 0$, weil, wie oben gezeigt wurde,

$$\lim_{z \to \infty} q(z, \varepsilon) = a$$

ist, wenn $z = a$ die Asymptote der Kurve q ist. Will man diesen Schluß vermeiden, dann bestimme man die zu $\frac{\eta'}{|\xi'|} = 0$ transversale Richtung aus der Gleichung

$$\frac{\bar{y}'}{|\bar{x}'|} = q_2\left(\operatorname{sign} \xi', \frac{\eta'}{|\xi'|}\right),$$

aus der wegen der Symmetrie von q_2

$$q_2\left(\operatorname{sign} \bar{x}', \frac{\bar{y}'}{|\bar{x}'|}\right) = 0,$$

also wegen (7)

$$\frac{1}{q_1\left(\frac{\bar{x}'}{|\bar{y}'|}, \operatorname{sign} \bar{y}'\right)} = 0$$

und wegen der Eindeutigkeit der Funktion q_1

$$\frac{\bar{x}'}{|\bar{y}'|} = \frac{x'}{|y'|}$$

folgt, d. h. wieder die Symmetrie der Transversalitätsbedingung. Im Fall $y' = 0$ stellt man die entsprechenden Überlegungen mit Hilfe der Funktion $q_2(\varepsilon_2, z_2)$ an, da ja nun $x' \neq 0$ ist.

2. Die Bedingung (8) ist notwendig. x', y' und ξ', η' mögen gegenseitig transversale Richtungen sein, so daß

$$\begin{cases} \xi' f_{x'}(\ldots, x', y') + \eta' f_{y'}(\ldots, x', y') = 0 \\ x' f_{x'}(\ldots, \xi', \eta') + y' f_{y'}(\ldots, \xi', \eta') = 0 \end{cases} \tag{11}$$

gilt. Darin darf $y' \neq 0$ vorausgesetzt werden (andernfalls $x' \neq 0$); ist nun zunächst auch $\eta' \neq 0$, dann setze man sign $y' =$ sign $\eta' = \varepsilon$ und erhält nach (2)

$$z_1 = \frac{x'}{|y'|} = -\varepsilon \frac{f_{y'}\left(\ldots, \frac{\xi'}{|\eta'|}, \varepsilon\right)}{f_{x'}\left(\ldots, \frac{\xi'}{|\eta'|}, \varepsilon\right)} \quad \left(f_{x'}\left(\ldots, \frac{\xi'}{|\eta'|}, \varepsilon\right) \neq 0 \text{ da } y' \neq 0!\right),$$

$$\zeta_1 = \frac{\xi'}{|\eta'|} = -\varepsilon \frac{f_{y'}\left(\ldots, \frac{x'}{|y'|}, \varepsilon\right)}{f_{x'}\left(\ldots, \frac{x'}{|y'|}, \varepsilon\right)},$$

also

$$z_1 = q_1(q_1(z_1, \varepsilon), \varepsilon).$$

Ist aber $\eta' = 0$, dann ist

$$z_1 = \frac{x'}{|y'|} = \lim_{\zeta \to \infty} q_1(\zeta, \varepsilon),$$

und andererseits, da $f_{x'}(\ldots, z_1, \varepsilon) = 0$ sein muß, der Gleichung (2) zufolge

$$\lim_{z \to z_1} q_1(z, \varepsilon) = \infty,$$

so daß auch in diesem Fall die Symmetrie der Funktion q_1 erwiesen ist.

2. Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß die Mannigfaltigkeit der symmetrischen Variationsprobleme sehr groß ist.

Zunächst wird gezeigt: *Die Funktion $q(z, \varepsilon)$ muß, wenn sie durch die Gleichung (6) ein symmetrisches Variationsproblem definieren, d. h. die hinreichende Bedingung des Satzes erfüllen soll, homogen erster Ordnung in z und ε sein.* Daß q *positiv*-homogen ist, folgt z. B. für $q = q_1$ aus der Definitionsgleichung (2)

$$q_1 = -\varepsilon_1 \frac{f_{y'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)}{f_{x'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)}.$$

Nun ist aber für $k > 0$

$$q_1(-kz_1, -k\varepsilon_1) = k\varepsilon_1 \frac{f_{y'}(\ldots, -z_1, -\varepsilon_1)}{f_{x'}(\ldots, -z_1, -\varepsilon_1)} = k\varepsilon_1 \frac{f_{y'}(\ldots, -x', -y')}{f_{x'}(\ldots, -x', -y')}$$

$$= k\varepsilon_1 \frac{f_{y'}(\ldots, x', y')}{f_{x'}(\ldots, x', y')} = k\varepsilon_1 \frac{f_{y'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)}{f_{x'}(\ldots, z_1, \varepsilon_1)} = -kq_1(z_1, \varepsilon_1).$$

Dabei folgt die Gleichung

$$\frac{f_{y'}(\ldots, -x', -y')}{f_{x'}(\ldots, -x', -y')} = \frac{f_{y'}(\ldots, +x', +y')}{f_{x'}(\ldots, +x', +y')}$$

daraus, daß

$$\xi' f_{x'}(\ldots, x', y') + \eta' f_{y'}(\ldots, x', y') = 0,$$
$$x' f_{x'}(\ldots, \xi', \eta') + y' f_{y'}(\ldots, \xi', \eta') = 0,$$

also auch

$$\xi' f_{x'}(\ldots, -x', -y') + \eta' f_{y'}(\ldots, -x', -y') = 0,$$
$$-x' f_{x'}(\ldots, \xi', \eta') - y' f_{y'}(\ldots, \xi', \eta') = 0$$

ist. Also ist für ein symmetrisches Variationsproblem

$$q(z, \varepsilon) = \varepsilon Q\left(\frac{z}{\varepsilon}\right). \tag{12}$$

Um die Symmetrieeigenschaft

$$q(q(z, \varepsilon), \varepsilon) = z$$

zu befriedigen, *definiert man in dem Quadranten* $-\infty < z \leqq a$, $q = a$; $z = a$, $a \leqq q < +\infty$ *der* q-z-*Ebene die Funktion* $Q(z)$ *der Gleichung* (12) *als eine monoton von* $Q = a$ *(für* $z = -\infty$*) bis* $+\infty$ *wachsende Funktion und setzt sie durch Spiegelung an der Geraden* $q = z$ *in den vierten Quadranten fort.* Dann ist

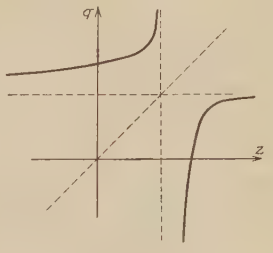


Fig. 1.

$$q(q(z, +1), +1) = Q(Q(z)) = z$$

und

$$q(q(z, -1), -1) = q(-Q(-z), -1)$$
$$= -Q(Q(-z)) = -(-z) = z.$$

Also sind die symmetrischen Variationsprobleme den eben charakterisierten Funktionen $Q(z)$ *eineindeutig zugeordnet.*

Das Variationsproblem

$$\delta \int \sqrt{E x'^2 + 2 F x' y' + G y'^2}\, dt = 0$$

ist durch die gleichseitige Hyperbel

$$Q(z) = -\frac{Fz + G}{Ez + F}$$

mit den Asymptoten $z = -\frac{F}{E}$ und $Q = -\frac{F}{E}$ gekennzeichnet:

$$q(z, \varepsilon) = \varepsilon Q\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = -\varepsilon \frac{F\frac{z}{\varepsilon} + G}{E\frac{z}{\varepsilon} + F} = -\frac{Fz\varepsilon + G}{Ez + F\varepsilon}.$$

3. Herr Radon bestimmt die symmetrischen Variationsprobleme im Rahmen einer weiteren Aufgabe: Es wird nach allen konvexen Kurven gefragt, die gegenüber einer passenden Korrelation invariant sind. Die Korrelation besteht 1. aus einer Polarkorrelation bezüglich eines Kreises vom Radius a um das Zentrum O; diese überführt das Stützelement $(r, \varphi, \vartheta) - r$ und φ sind die Koordinaten des Kurvenpunktes, $0 < \vartheta < \pi$ der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente — in das Stützelement $\left(r' = \frac{a^2}{r \sin \vartheta},\ \varphi' = \varphi + \vartheta - \frac{\pi}{2},\ \vartheta' = \pi - \vartheta\right)$; 2. aus einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$.

Herr Radon benutzt zur Darstellung der Eilinien den Parameter $u = 2\varphi + \vartheta$ und weist zunächst nach, daß die Eilinie durch die Funktion $\vartheta(u)$ bis auf eine zentrische Ähnlichkeitstransformation mit positivem Ähnlichkeitsverhältnis eindeutig bestimmt ist, wenn nur $\vartheta(u)$ folgende vier Bedingungen erfüllt:

$$(13)\qquad \begin{cases} \text{I.} & \vartheta(u+4\pi) = \vartheta(u) \\ \text{II.} & 0 < \vartheta(u) < \pi \\ \text{III.} & \left|\frac{\vartheta(u_2)-\vartheta(u_1)}{u_2-u_1}\right| \leqq 1 \\ \text{IV.} & \int_0^{4\pi} \operatorname{ctg}\vartheta(u)\,du = 0. \end{cases}$$

Es ist dann

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(u - \vartheta(u)), \qquad r(u) = \frac{C}{\sqrt{\sin\vartheta(u)}}\, e^{\frac{1}{2}\int_0^u \operatorname{ctg}\vartheta(u)\,du} \qquad (C>0).$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Invarianz der durch $\vartheta(u)$ definierten Eilinie gegen die oben beschriebene Korrelation hat man dann

$$(14)\qquad \text{V.}\quad \vartheta(u) + \vartheta(u+\pi) = \pi.$$

Speziell erfüllt

$$\vartheta(u) = \arccos(\omega\cos u) \qquad |\omega| < 1$$

die Bedingungen I bis V und führt auf Ellipsen mit dem Halbachsenverhältnis $\sigma = \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}}$ [3].

Nun ist die Indikatrix eines regulären definiten Variationsproblems

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f(\ldots, x', y')\,dt = 0$$

eine ganz im Endlichen gelegene geschlossene Kurve, deren Gleichung für das Koordinatensystem x', y'

$$f(x, y, x', y') = x' f_{x'} + y' f_{y'} = 1$$

lautet. Symmetrie der Transversalitätsbedingung bedeutet, daß sich die Halbmesser der Indikatrix zu Paaren konjugierter zusammenfassen lassen: die zu der Tangente im Punkte (x', y') parallele Richtung bestimmt einen Kurvenpunkt, in dem die Tangente parallel dem ersten Radiusvektor ist; d. h. aber: die Indikatrix eines symmetrischen Variationsproblems ist

[3] Nicht $\sigma = \frac{1-\omega}{1+\omega}$, wie in der Radonschen Note angegeben ist (a. a. O. S. 126).

gegen die von Herrn Radon betrachtete Korrelation invariant, und also hat Herr Radon alle symmetrischen Variationsprobleme bestimmt[4]).

4. Zum Schluß sollen die Beziehungen zwischen der Radonschen und der hier entwickelten Darstellung symmetrischer Variationsprobleme aufgezeigt werden.

Die Indikatrix eines solchen Variationsproblems wird in Polarkoordinaten der Gl. (6) zufolge folgendermaßen dargestellt:

$$(15)\quad \begin{cases} \varrho = \dfrac{1}{C_1 |\sin\varphi|}\, e^{-\int \frac{dz_1}{z_1 - q_1}}, & z_1 = \dfrac{\cos\varphi}{|\sin\varphi|}, \quad \sin\varphi \neq 0, \\ \varrho = \dfrac{1}{C_2 |\cos\varphi|}\, e^{-\int \frac{dz_2}{z_2 - q_2}}, & z_2 = \dfrac{\sin\varphi}{|\cos\varphi|}, \quad \cos\varphi \neq 0. \end{cases}$$

Durch Differentiation nach φ findet man (z. B. für $\sin\varphi \neq 0$)

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} = \varepsilon_1 \frac{1 + z_1 q_1}{z_1 - q_1},$$

und nach (12), da $\frac{z_1}{\varepsilon_1} = \operatorname{ctg}\varphi$ ist,

$$(16)\qquad \operatorname{ctg}\vartheta = \varepsilon_1 \frac{1 + \operatorname{ctg}\varphi\, \varepsilon_1 q_1}{\varepsilon_1 \operatorname{ctg}\varphi - q_1} = \frac{1 + \operatorname{ctg}\varphi\, Q(\operatorname{ctg}\varphi)}{\operatorname{ctg}\varphi - Q(\operatorname{ctg}\varphi)}$$

und

$$(17)\qquad Q(\operatorname{ctg}\varphi) = \operatorname{ctg}(\varphi + \vartheta).$$

Nun möge $\vartheta(u)$ die von Herrn Radon angegebenen Bedingungen (13) und (14) erfüllen. Daraus sollen folgende Eigenschaften der Funktion $Q(\lambda)$ abgeleitet werden:

$$(18)\quad \begin{cases} \text{I.} & Q(\lambda) \text{ eindeutig definiert für } -\infty < \lambda < +\infty; \\ \text{II.} & Q(\lambda) \text{ monoton wachsend, von } Q = a + 0 \text{ für } \lambda = -\infty \text{ bis} \\ & \quad +\infty \text{ für } \lambda = a - 0; \\ \text{III.} & Q(\lambda) - \lambda \neq 0; \\ \text{IV.} & Q(Q(\lambda)) = \lambda. \end{cases}$$

(18, I) folgt aus (17). (18, II) folgt aus (13, III) in Verbindung mit (17). Denn (13, III) drückt die Monotonie von φ und $\vartheta + \varphi$ als Funktionen von u aus; daraus folgt, daß in Gl. (17) Q zunimmt, wenn $\operatorname{ctg}\varphi$ wächst. Nach (13, II) und (17) gilt

$$\lim_{\varphi \to -0} Q(\operatorname{ctg}\varphi) = a \text{ (endlicher Wert)}.$$

[4]) Da die Radonsche Darstellung nur für *konvexe* Kurven gilt, liefern die Gl. (13) und (14) zunächst nur alle symmetrischen Variationsprobleme, deren Eichkurven Eilinien sind; man sieht aber leicht ein, daß die Indikatrix eines jeden symmetrischen Variationsproblems konvex ist, was sich aus unserer Darstellung von selbst ergeben wird.

Aus (13, II) und (16) folgt (18, III). Da $2\varphi + \vartheta = u$, $\varphi = \frac{u-\vartheta}{2}$, $\varphi + \vartheta = \frac{u+\vartheta}{2}$ ist, schließt man aus (17)

$$Q\left(\operatorname{ctg}\frac{u-\vartheta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{u+\vartheta}{2}. \tag{19}$$

Also geht für $u \,||\, u+\pi$ die linke Seite der Gleichung (17) wegen (14) über in

$$Q\left(\operatorname{ctg}\frac{u+\pi-\vartheta(u+\pi)}{2}\right) = Q\left(\operatorname{ctg}\frac{u+\vartheta(u)}{2}\right),$$

und die rechte Seite wird

$$\operatorname{ctg}\frac{u+\pi+\vartheta(u+\pi)}{2} = \operatorname{ctg}\frac{u-\vartheta(u)}{2};$$

daher ist

$$Q\left(Q\left(\operatorname{ctg}\frac{u-\vartheta}{2}\right)\right) = \operatorname{ctg}\frac{u-\vartheta}{2},$$

also gilt (18, IV), und daraus folgt dann auch der zweite Teil von (18, II).

Nun soll umgekehrt die Gültigkeit der Gl. (13) und (14) aus den Eigenschaften von $Q(\lambda)$ geschlossen werden.

(13, I) besagt, daß ϑ als Funktion von φ die Periode 2π hat. Für die Indikatrix eines symmetrischen Variationsproblems gilt aber sogar

$$\vartheta(\varphi+\pi) = \vartheta(\varphi),$$

wie aus (16) und (18, I) folgt, also beim Übergang zu dem Parameter $u = 2\varphi + \vartheta$

$$\vartheta(u+2\pi) = \vartheta(u).$$

Die Voraussetzung, daß es sich um ein symmetrisches Variationsproblem handelt, wird hier bei der Einführung von $\varepsilon q_1(z_1, \varepsilon) = Q(\operatorname{ctg}\varphi)$ benutzt. Auch aus der Radonschen Darstellung der symmetrischen Variationsprobleme folgt, daß $\vartheta(u)$ die Periode 2π hat: man schreibe nur Gl. (14) für $u+2\pi$ und $u+3\pi$ hin und benutze (13, I). (13, II) schließt man aus (16) und (18, III). (13, III) folgt aus der Monotonie von $\varphi + \vartheta$ und φ als Funktionen von u, die man so beweist: Zunächst ist

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{d(2\varphi+\vartheta)}{d\varphi} = 1 + \frac{d(\varphi+\vartheta)}{d\varphi} > 0,$$

da nach (18, II) und (17) $(\varphi+\vartheta)$ als Funktion von φ monoton wächst. Also ist $\varphi(u)$ monoton und daher auch $\varphi+\vartheta$ als Funktion von u. (13, IV) drückt die Periodizität des Radiusvektors der Indikatrix aus, die man sofort aus der Darstellung (15) abliest. Um endlich noch die für die Symmetrie der Transversalitätsbedingung charakteristische Gl. (14) aus (18, IV) abzuleiten, schreibe man die Gl. (19) für die Parameterwerte u und $u+\pi$ hin und setze

$$\vartheta' = \vartheta(u+\pi) = \pi - \vartheta(u) + 2\gamma.$$

Dann ist also zu beweisen, daß nur $\gamma = 0$ möglich ist. Es ergibt sich

$$Q\left(\operatorname{ctg}\frac{u-\vartheta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{u+\vartheta}{2}, \tag{20a}$$

$$Q\left(\operatorname{ctg}\frac{u+\pi-\vartheta'}{2}\right) = Q\left(\operatorname{ctg}\left[\frac{u+\vartheta}{2}-\gamma\right]\right) = \operatorname{ctg}\left[\frac{u-\vartheta}{2}+\gamma\right]. \tag{20b}$$

Wegen der Voraussetzung (18, IV) ist $\gamma = 0$ sicher eine Lösung. Nun denke man sich die linke und die rechte Seite von Gl. (20b) als Funktion von γ aufgezeichnet. Für $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi$ schneiden sich die beiden Kurven. Wächst γ von 0 an, dann wächst das Argument von Q, also Q selbst monoton bis $+\infty$ bei $\gamma = \gamma' - 0$, dann von $-\infty$ bei $\gamma = \gamma' + 0$ bis zu dem Anfangswert, den Q wieder bei $\gamma = \pi$ erreicht. Die rechte Seite der Gl. (20b) nimmt dagegen von demselben Anfangswert monoton ab bis $-\infty$ bei $\gamma = \gamma'' - 0$, und dann von $+\infty$ bei $\gamma = \gamma'' + 0$ bis zu dem Ausgangswert bei $\gamma = \pi$. Also schneiden sich die beiden Kurven noch genau einmal bei $0 < \gamma < \pi$, und zwar, wie man aus Gl. (20a) und (20b) sieht, bei $\gamma = \vartheta$. Demnach erhält man $\vartheta' = \pi - \vartheta$ oder $\vartheta' = \pi + \vartheta$; der zweite Wert ist aber wegen $0 < \vartheta$, $\vartheta' < \pi$ unbrauchbar, und damit ist Gl. (14) bewiesen.

Das Variationsproblem

$$\delta \int \sqrt{E x'^2 + 2F x' y' + G y'^2}\, dt = 0,$$

dessen Indikatrix die Ellipse

$$E x'^2 + 2F x' y' + G y'^2 = 1$$

ist, wird durch die gleichseitige Hyperbel

$$Q(z) = -\frac{Fz+G}{Ez+F} \tag{21}$$

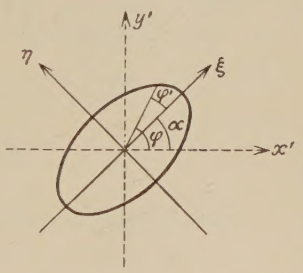


Fig. 2.

charakterisiert, worin $z = \operatorname{sign} y' \operatorname{ctg}\varphi$ ist. Auf Hauptachsen bezogen ist die Gleichung der Ellipse

$$\mathfrak{E}\xi^2 + \mathfrak{G}\eta^2 = 1.$$

Dabei ist

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = E\cos^2\alpha + 2F\sin\alpha\cos\alpha + G\sin^2\alpha, \\ \mathfrak{G} = E\sin^2\alpha - 2F\sin\alpha\cos\alpha + G\cos^2\alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2F}{E-G}. \end{cases} \tag{22}$$

An Stelle von (21) erhält man jetzt

$$\mathfrak{Q}(\zeta) = -\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}\zeta}, \tag{23}$$

worin $\zeta = \operatorname{sign}\eta' \operatorname{ctg}\varphi' = \operatorname{sign}\eta' \operatorname{ctg}(\varphi - \alpha)$ ist. Nach Gl. (16) gilt

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{1+\zeta\,\mathfrak{Q}(\zeta)}{\zeta - \mathfrak{Q}(\zeta)} = \frac{\left(\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}-1\right)\zeta}{1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}\zeta}.$$

Das stimmt mit der Radonschen Parameterdarstellung der Ellipse überein. Denn nach ihr ist

$$\vartheta(u) = \arccos(\omega \cos u),$$

woraus wegen $u = 2\varphi' + \vartheta$

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{-2\omega \operatorname{ctg}\varphi'}{1+\omega+(1-\omega)\operatorname{ctg}^2\varphi'} = \frac{-2\frac{\omega}{\omega+1}\zeta}{1+\frac{1-\omega}{1+\omega}\zeta^2} \tag{24}$$

folgt. Darin ist

$$\frac{1-\omega}{1+\omega} = \sigma^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}$$

das Quadrat des Halbachsenverhältnisses der Ellipse. Bemerkenswert ist, daß die linke Seite der Gl. (21) gegenüber der Transformation auf Hauptachsen nicht invariant ist, man erhält aus ihr nicht $\mathfrak{Q}(\xi)$, wenn man $z = \operatorname{sign} y' \operatorname{ctg}(\varphi' + \alpha)$ setzt und durch (22) zu dem neuen Koordinatensystem übergeht. Dagegen hat

$$\operatorname{arc\,ctg}\frac{1+zQ(z)}{z-Q(z)} = \vartheta \tag{25}$$

als Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente invarianten Charakter: Setzt man in (25) $z = \operatorname{sign} y' \operatorname{ctg}(\varphi' + \alpha)$, so erhält man direkt die Formel (24), wenn man (22) beachtet.

(Eingegangen am 12. März 1928.)

Neuerscheinungen

aus dem Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung

von **Arnold Berliner**

Dr.-Ing. e. h. Dr. phil., Herausgeber der „Naturwissenschaften"

Vierte Auflage

Mit 802 Abbildungen. V, 658 Seiten. 1928. Gebunden RM 19.80

Physik

Ein Lehrbuch für Studierende an den Universitäten und Technischen Hochschulen

von **Wilhelm H. Westphal**

a. o. Professor der Physik an der Universität Berlin

Mit 471 Abbildungen. XVI, 536 Seiten. 1928. RM 18.—; geb. RM 19.60

Lichtelektrische Erscheinungen

Von **Bernhard Gudden**

o. Professor der Experimentalphysik an der Universität Erlangen

Mit 127 Abbildungen. IX, 325 Seiten. 1928. RM 24.—; geb. RM 25.20

(Struktur der Materie in Einzeldarstellungen, Band VIII)

Vier Vorlesungen über Wellenmechanik

Gehalten an der Royal Institution in London im März 1928

Von **E. Schrödinger**

ord. Professor der Theoretischen Physik an der Universität Berlin

Übersetzt von Dr. Hans Kopfermann

Mit 3 Abbildungen. V, 57 Seiten. 1928. RM 3.90

Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen

Von **Alwin Walther**

o. Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt

Erster Teil

Funktion und graphische Darstellung Differential- und Integralrechnung

Mit 174 Abbildungen. VIII, 220 Seiten. 1928. RM 8.60; geb. RM 9.60

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Junge, G., Einführung in Wesen und Wert der Mathematik. 92 S. Gr.-8°. Karlsruhe, G. Braun, 1928. (Wissen und Wirken, Bd. 56.)

Menger, K., Dimensionstheorie. IV, 320 S. Gr.-8°. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Kneser, A., Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart. 70 S. Gr.-8°. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928. (Wissenschaftliche Grundfragen. Philosophische Abhandlungen, herausgegeben von R. Hönigswalder, Bd. IX.)

Fundamenta Mathematicae. Redaktorowie St. Mazurkiewicz i W. Sierpiński. Sekretarz redakcji K. Kuratowski. Tom XII. Z subwencji ministerstwa W. R. i. O. P. IV, 312 S. Gr.-8°. Warszawa 1928. Paris, Gauthier-Villars et Cie.

Maennchen, Ph., Methodik des mathematischen Unterrichts. X, 297 S. Gr.-8°. Frankfurt a. M., Moritz Diesterweg, 1928. (Handbuch des Unterrichts an höheren Schulen, Bd. XIII.)

Prasard, G., Six lectures on recent researches in the theory of Fourier series. XIV, 140 S. Gr.-8°. Calcutta, University Press. 1928.

Hierzu je eine Beilage vom Verlag Julius Springer in Berlin und Wien.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig